

(1)

与えられた不等式を変形すると

$$(2^x)^3 - 3 \cdot (2^x)^2 - 2^x + 3 > 0$$

となる。これを 2^x の 3 次不等式と見て解くと、

$$\begin{aligned} (2^x + 1)(2^x - 1)(2^x - 3) &> 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 3) &> 0 \quad (\because 2^x + 1 > 0) \\ \Leftrightarrow 0 < 2^x < 1, 2^x > 3 \quad (\because 2^x > 0) \\ \therefore x < 0, \log_2 3 < x \end{aligned}$$

となる。

(答) $x < 0, \log_2 3 < x$

(2)

条件より、

$$1 - x^2 = 2y^2 \geq 0$$

であるから、 x の取りうる値は $-1 \leq x \leq 1$ である。よって、 $x + 4y^2$ から y を消去すると

$$\begin{aligned} x + 4y^2 &= x + 2 \cdot 2y^2 \\ &= x + 2(1 - x^2) \\ &= -2x^2 + x + 2 \\ &= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq x \leq 1$ においてこの 2 次関数は $x = \frac{1}{4}$ のとき、最大値 $\frac{17}{8}$ をとり、 $x = -1$ のとき、最小値 -1 をとる。

(答) 最大値： $\frac{17}{8}$ ，最小値： -1

(3)

求める 2 つの整数を m, n とおく。条件より

$$\begin{aligned} |m + n| &= |mn| \\ \Leftrightarrow mn &= \pm(m + n) \end{aligned}$$

である。以下、符号によって場合分けを行う。

[1] $mn = m + n$ のとき

式を変形すると

$$(m - 1)(n - 1) = 1$$

となる。 $m - 1, n - 1$ がそれぞれ整数であるから、

$$\begin{aligned} (m - 1, n - 1) &= (1, 1), (-1, -1) \\ \therefore (m, n) &= (2, 2), (0, 0) \end{aligned}$$

となる。

[2] $mn = -(m + n)$ のとき

式を変形すると

$$(m + 1)(n + 1) = 1$$

となる。 $m + 1, n + 1$ がそれぞれ整数であるから、

$$\begin{aligned} (m + 1, n + 1) &= (1, 1), (-1, -1) \\ \therefore (m, n) &= (0, 0), (-2, -2) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める 2 つの整数の組は $(-2, -2), (0, 0), (2, 2)$ である。

(答) $(-2, -2), (0, 0), (2, 2)$

(4)

C を積分定数とする。部分積分を用いると

$$\begin{aligned} \int x^2 \log x dx &= \int \left(\frac{1}{3} x^3 \right)' \log x dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log x - \int \frac{1}{3} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + C \end{aligned}$$

となる。

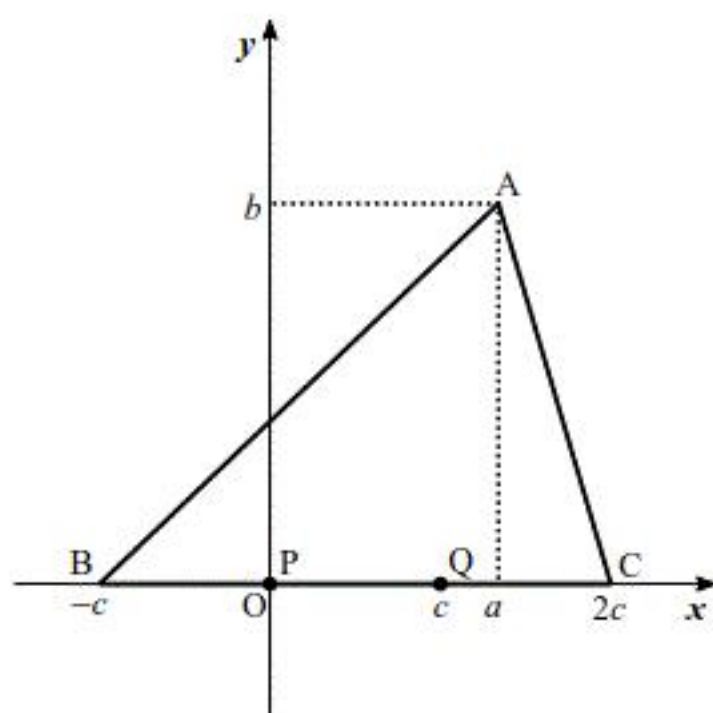
(答) $\frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + C$ (C は積分定数)

Ⅱ

(1)

a, b, c を実数とし、 $b \neq 0, c > 0$ とする。いま、 xy 平面上に点 A, B, C, P, Q の座標を

$A(a, b), B(-c, 0), C(2c, 0), P(0, 0), Q(c, 0)$ とおく。これは一般性を失わない。以下に三角形 ABC および点 P, Q を図示する。



このとき、

$$\begin{aligned} 2AB^2 + AC^2 &= 2\left\{(a+c)^2 + b^2\right\} + \left\{(a-2c)^2 + b^2\right\} \\ &= 2a^2 + 4ac + 2c^2 + 2b^2 + a^2 - 4ac + 4c^2 + b^2 \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2 \\ 3(AP^2 + 2BP^2) &= 3\left\{(a^2 + b^2) + 2c^2\right\} \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2 \end{aligned}$$

となるから、 $2AB^2 + AC^2 = 3(AP^2 + 2BP^2)$ が示された。

(証明終)

(2)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ より $\cos x > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} \\ \therefore \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \end{aligned}$$

である。また、 $\sin x = \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \tan x$ であるから、

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}, \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

(3)

$\beta - \alpha \neq 0$ であることに注意すると、条件式は、

$$\begin{aligned} \gamma + \beta i &= \alpha(1 + i) \\ \Leftrightarrow \gamma - \alpha &= -i(\beta - \alpha) \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= -i \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、点 A を中心に点 B を $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転させると点 C に一致する。したがって、三

角形 ABC は $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

(答) $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形

III

(1)

$x^3 + y^3 = 35$ を変形すると

$$x^3 + y^3 = 35$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 35$$

$$\Leftrightarrow 5^3 - 3xy \cdot 5 = 35 \quad (\because x+y=5)$$

$$\Leftrightarrow xy = 6$$

である。ここで、

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

であるから、 x, y は t についての 2 次方程式

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

の異なる 2 つの解である。この方程式の解は、

$$t = 2, 3$$

であるから、求める x, y の値は

$$(x, y) = (2, 3), (3, 2)$$

となる。

(答) $(x, y) = (3, 2), (2, 3)$

(2)(i)

$y = x^3 - x$ のとき $y' = 3x^2 - 1$ であるから、曲線 $y = x^3 - x$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

さらに、 $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ より曲線 $y = x^3 - x$ と x 軸との交点の x 座標は $x = 0, \pm 1$ である。

ここで、曲線 $y = x^3 - x$ と直線 $y = x$ の共有点の x 座標は、2 式より y を消去すると、

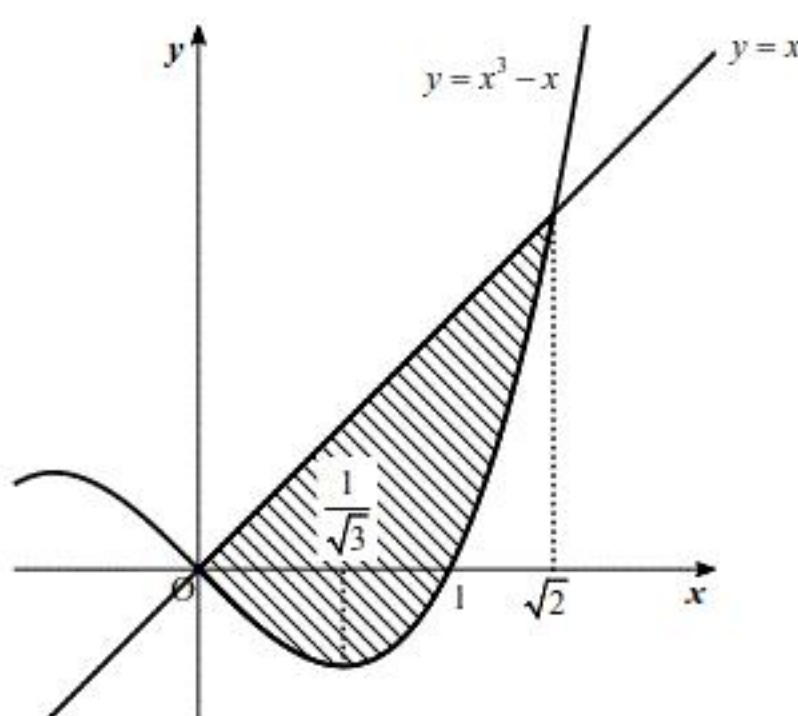
$$x^3 - x = x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{2}$$

と求まる。よって、曲線 $y = x^3 - x$ と直線 $y = x$ 、および領域 D を図示すると以下の斜線部のようになる。



領域 D の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \{x - (x^3 - x)\} dx &= \int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 4 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1

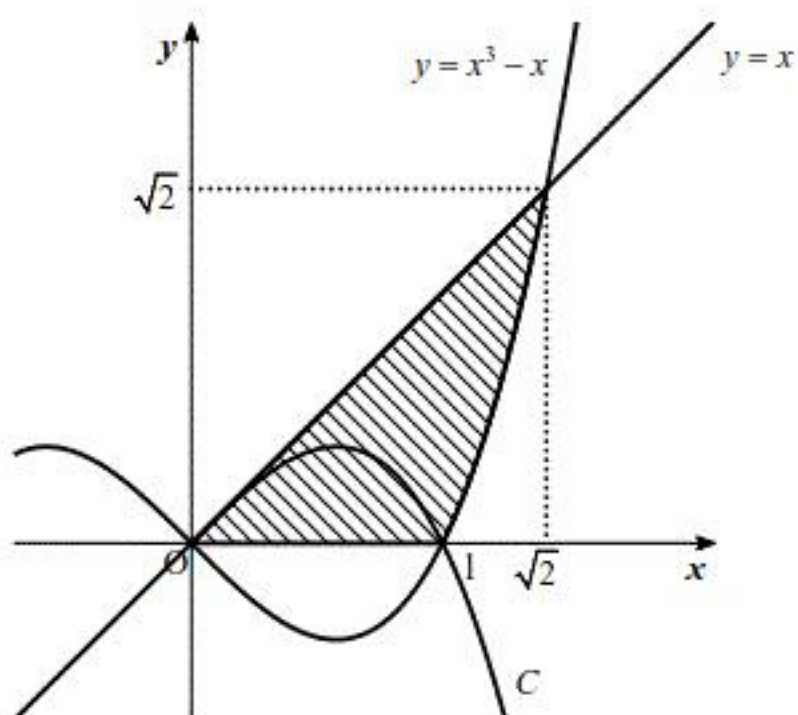
(ii)

曲線 $y = x^3 - x$ の $0 \leq x$ の部分と x 軸に関して対称な曲線を考えると、その曲線の方程式は

$y = -x^3 + x$ ($0 \leq x$) である。この曲線を C とする。ここで、 $0 \leq x$ において、

$$x - (-x^3 + x) = x^3 \geq 0$$

であるから、曲線 C は直線 $y = x$ の下側にある。したがって、求める立体の体積は次図の斜線部を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積と等しい。



上図より、底面が半径 $\sqrt{2}$ の円、高さが $\sqrt{2}$ の円錐に注目すると、求める立体の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \pi \cdot \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2} - \pi \int_1^{\sqrt{2}} (x^3 - x)^2 dx &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi - \pi \int_1^{\sqrt{2}} (x^6 - 2x^4 + x^2) dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi - \pi \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi - \frac{22\sqrt{2} - 8}{105} \pi \\ &= \frac{8 + 48\sqrt{2}}{105} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8 + 48\sqrt{2}}{105} \pi$

IV

(1)

$f(x) = \sqrt{x+2}$ とおくと, $a_{n+1} = f(a_n)$ であり, $f(x)$ は $x \geq -2$ において単調増加である。ここで,

$$a_2 = \sqrt{a_1+2} = \sqrt{3} > 1 = a_1$$

であるから,

$$a_3 = f(a_2) > f(a_1) = a_2$$

となる。以上より, $a_3 > a_2$ であることが示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を用いて, $n \geq 1$ について $a_{n+1} > a_n$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

(1)の議論より成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つ, すなわち $a_{k+1} > a_k$ であると仮定したとき

$n=k+1$ を代入すると,

$$a_{k+2} = f(a_{k+1}) > f(a_k) = a_{k+1}$$

となるから, $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]より $n \geq 1$ について $a_{n+1} > a_n$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

まず数学的帰納法を用いて, $n \geq 1$ について $b_n > 0$ すなわち $a_n < 2$ となることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 1$ より成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定する, すなわち $a_k < 2$ であると仮定したとき

$n=k+1$ を代入すると,

$$a_{k+1} = f(a_k) < f(2) = \sqrt{2+2} = 2$$

となるから, $n=k+1$ のときにも成り立つ。

以上[1], [2]より, $n \geq 1$ について $b_n > 0$ すなわち $a_n < 2$ が成り立つ。このとき, (2)より, $n \geq 1$ について

$$a_n > a_{n-1} > \cdots > a_2 > a_1 = 1$$

$$\therefore a_n > 1$$

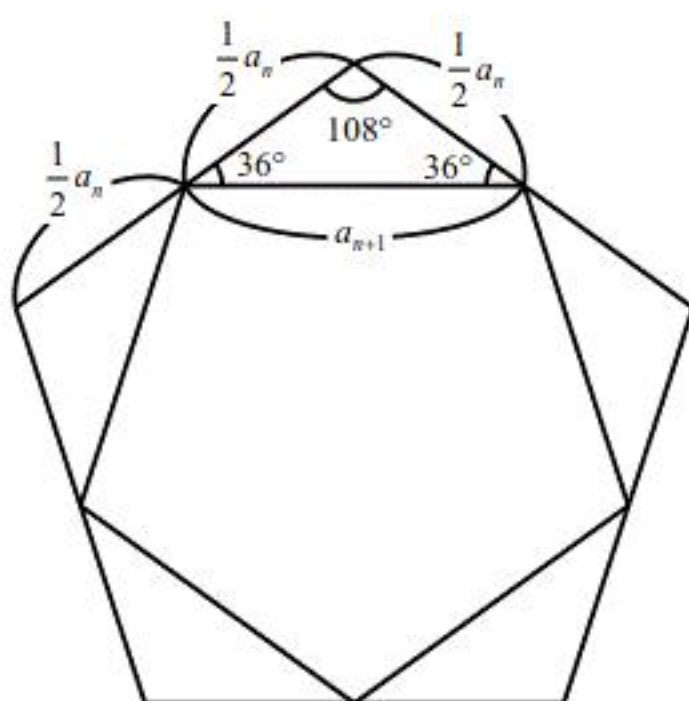
が成り立つから,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2 - a_{n+1} \\ &= 2 - \sqrt{a_n + 2} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{a_n + 2})(2 + \sqrt{a_n + 2})}{2 + \sqrt{a_n + 2}} \\ &= \frac{4 - (a_n + 2)}{2 + \sqrt{a_n + 2}} \\ &= \frac{2 - a_n}{2 + \sqrt{a_n + 2}} \\ &< \frac{2 - a_n}{2 + \sqrt{1 + 2}} \quad (\because 2 - a_n > 0) \\ &< \frac{1}{3} b_n \end{aligned}$$

となる。以上より, $n \geq 1$ について $b_{n+1} < \frac{1}{3} b_n$ となることが示された。

(証明終)

正五角形 P を $P(0)$ として、正五角形 $P(n)$ の1辺の長さを a_n 、面積を S_n とする。正五角形 $P(n)$ および $P(n+1)$ を以下に図示する。



上図より、 $n \geq 0$ について、

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{2} a_n \cos 36^\circ = a_n \cos 36^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

が得られる。 $\theta = 36^\circ$ とすると $5\theta = 180^\circ \Leftrightarrow 3\theta = 180^\circ - 2\theta$ より、倍角の公式および3倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(180^\circ - 2\theta) \\ \Leftrightarrow \sin 3\theta &= \sin 2\theta \\ \Leftrightarrow 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta &= 2\sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow 3 - 4\sin^2 \theta &= 2\cos \theta \quad (\because \sin \theta \neq 0) \\ \Leftrightarrow 4\cos^2 \theta - 2\cos \theta - 1 &= 0 \\ \therefore \cos 36^\circ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (\because \cos 36^\circ > 0) \end{aligned}$$

である。ここで、 $P(n)$ と $P(n+1)$ は相似であり、相似比は $a_n : a_{n+1}$ であるから、その面積比は $S_n : S_{n+1} = a_n^2 : a_{n+1}^2$ である。したがって、 P の面積を S_0 とすれば、 $\textcircled{1}$ より

$$\frac{S_n}{S_0} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{2n} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8} \right)^n$$

が成り立つ。よって、

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8} \right)^n < \frac{1}{3}$$

を満たす最小の自然数 n を求めればよい。いま、

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8} \right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{32} > \frac{7+3 \cdot 2}{33} > \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

であり

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8} \right)^3 = \frac{9+4\sqrt{5}}{64} < \frac{9+4 \cdot 3}{63} = \frac{1}{3}$$

であるから、求める最小の自然数 n は3である。