

I

(1)

三角関数の合成を用いて式を変形すると、

$$\begin{aligned}\sin x - \sqrt{3} \cos x &< 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) &< 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x < 2\pi$ であるから、 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ となる。よって、 $\textcircled{1}$ の不等式を満たす x の範囲は、

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < 0, \pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \\ \therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$$

(2)

x^4 を変形すると、 $x^4 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1$ となる。よって、積分定数を C とすると、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x+1} dx &= \int \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1| + C\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1| + C \quad (\text{ただし、} C \text{ は積分定数})$$

(3)

$\frac{t}{30} = X$ とおくと、 $t \rightarrow \infty$ のとき $X \rightarrow \infty$ である。 $\lim_{a \rightarrow \infty} 2^{-a} = 0$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{-t}{2}} + 2^{\frac{-t}{30}}}{2^{\frac{-t}{30}}} &= \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{2^{-15X} + 2^{-X}}{2^{-X}} \\ &= \lim_{X \rightarrow \infty} (2^{-14X} + 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 1$$

(4)

すべての手の出し方は $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ 通りあり、これらは同様に確からしい。3 人のうちから勝つ人の選び方が ${}_3C_1 = 3$ 通りあり、1 人だけが勝つ手の出し方は 3 通りある。よって、求める確率は、

$$\frac{3 \cdot 3}{27} = \frac{1}{3}$$

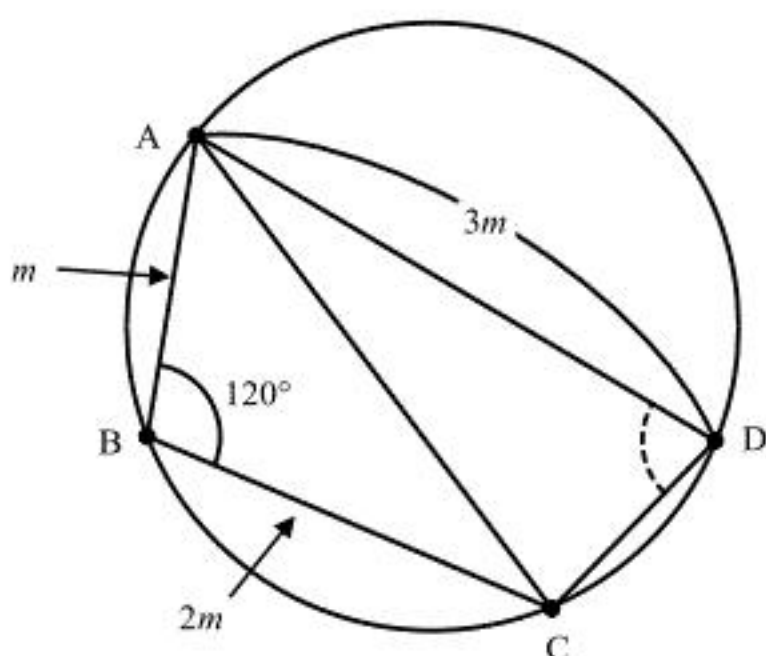
となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{3}$$

II

(1)

条件より $AB = m$, $BC = 2m$, $DA = 3m$ である。以下に円 O に内接する四角形 $ABCD$ を図示する。



$\triangle ABC$ について、余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \\ \Leftrightarrow AC^2 &= m^2 + 4m^2 - 2 \cdot m \cdot 2m \cdot \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow AC^2 &= 7m^2 \end{aligned}$$

となる。 $AC > 0$, $m > 0$ であるから、 $AC = \sqrt{7}m$ となる。

(答) $AC = \sqrt{7}m$

(2)

円 O の半径を r とおく。 $\triangle ABC$ について、正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin \angle ABC} &= 2r \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}m}{\sin 120^\circ} = 2r \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{21}}{3}m \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{21}}{3}m$

(3)

四角形 $ABCD$ は円に内接しているから、

$$\begin{aligned} \angle ADC + \angle ABC &= 180^\circ \\ \therefore \angle ADC &= 60^\circ (\because \angle ABC = 120^\circ) \end{aligned}$$

を満たす。 $\triangle ACD$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC \\ \Leftrightarrow 7m^2 &= 9m^2 + CD^2 - 2 \cdot 3m \cdot CD \cdot \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow CD^2 - 3mCD + 2m^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (CD - 2m)(CD - m) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。 $CD < BC (= 2m)$ であるから、 $CD = m$ となる。

(答) $CD = m$

(4)

(3)より、 $AB = CD = m$ であるから、円周角の定理より、

$$\angle ACB = \angle CAD$$

となる。錯角が等しいから、辺 AD と辺 BC は平行である。

(証明終)

III

(1)

3年後の借入残高は、2年後の借入残高に $(1+r)$ をかけて p 引いたものであるから、

$$\left[d(1+r)^2 - p\{(1+r)+1\} \right] (1+r) - p = d(1+r)^3 - p(3+3r+r^2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad d(1+r)^3 - p(3+3r+r^2)$$

(2)

n 年後の借入残高を a_n ($n=1, 2, 3, \dots$) とする。 $(n+1)$ 年後の借入残高 a_{n+1} は、 n 年後の借入残高 a_n に $(1+r)$ をかけて p 引いたものであるから、

$$a_{n+1} = (1+r)a_n - p \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。 $\textcircled{1}$ 式は、

$$a_{n+1} - \frac{p}{r} = (1+r) \left(a_n - \frac{p}{r} \right)$$

と変形できる。 $a_1 - \frac{p}{r} = d(1+r) - p - \frac{p}{r} = (1+r) \left(d - \frac{p}{r} \right)$ であるから、数列 $\left\{ a_n - \frac{p}{r} \right\}$ は初項

$(1+r) \left(d - \frac{p}{r} \right)$ 、公比 $(1+r)$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} a_n - \frac{p}{r} &= (1+r)^n \left(d - \frac{p}{r} \right) \\ \Leftrightarrow a_n &= (1+r)^n \left(d - \frac{p}{r} \right) + \frac{p}{r} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (1+r)^n \left(d - \frac{p}{r} \right) + \frac{p}{r}$$

(3)

返済が終わるのは $a_n \leq 0$ となったときであるから、 $a_n \leq 0$ を満たす最小の n を求めればよい。

$a_n = (1+r)^n \left(d - \frac{p}{r} \right) + \frac{p}{r}$ に、 $d=10^6$, $r=0.08$, $p=10^5$ を代入し、 $a_n \leq 0$ のときを考えると、

$$(1+0.08)^n \left(10^6 - \frac{10^5}{0.08} \right) + \frac{10^5}{0.08} \leq 0$$

を得る。整理すると、

$$(1.08)^n \cdot \left(10^6 - \frac{10^7}{8} \right) + \frac{10^7}{8} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1.08)^n \cdot \left(1 - \frac{10}{8} \right) + \frac{10}{8} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (1.08)^n \geq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1.08)^n \geq 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{2}$ 式は両辺正であるから、 $\textcircled{2}$ 式の両辺の常用対数を取り、 n について解くと、

$$n \log_{10} (1.08) \geq \log_{10} 5$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} \frac{108}{100} \geq \log_{10} \frac{10}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} \frac{2^2 \cdot 3^3}{10^2} \geq \log_{10} \frac{10}{2}$$

$$\Leftrightarrow n(2 \log_{10} 2 + 3 \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 10) \geq 1 - \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow n \cdot 0.0333 \geq 0.699$$

$$\Leftrightarrow n \geq 20.990 \dots$$

となる。これを満たす最小の自然数 n は21、すなわち返済が終わるのは21年後となる。

(答) 21年後

IV

(1)

$\int_0^1 f(x) dx$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 c(x-a)^2 dx \\ &= c \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{c}{3} \{ (1-a)^3 - (0-a)^3 \} \\ &= \frac{c}{3} (3a^2 - 3a + 1)\end{aligned}$$

となる。 $3a^2 - 3a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$ であるから, $\int_0^1 f(x) dx = 1$ より,

$$\begin{aligned}\frac{c}{3} (3a^2 - 3a + 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{3}{3a^2 - 3a + 1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{3}{3a^2 - 3a + 1}$$

(2)

$I = \int_0^1 xf(x) dx$ を計算すると,

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 cx(x-a)^2 dx \\ &= c \int_0^1 x(x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= c \int_0^1 (x^3 - 2ax^2 + a^2x) dx \\ &= c \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 \right]_0^1 \\ &= c \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}a^2 \right) \\ &= \frac{c(6a^2 - 8a + 3)}{12}\end{aligned}$$

となる。(1)より, $c = \frac{3}{3a^2 - 3a + 1}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}I &= \frac{6a^2 - 8a + 3}{12} \cdot \frac{3}{3a^2 - 3a + 1} \\ &= \frac{6a^2 - 8a + 3}{4(3a^2 - 3a + 1)}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = \frac{6a^2 - 8a + 3}{4(3a^2 - 3a + 1)}$$

(3)

$6a^2 - 8a + 3 = 2(3a^2 - 3a + 1) + (-2a + 1)$ と変形できるから,

$$I = \frac{1}{2} + \frac{-2a + 1}{4(3a^2 - 3a + 1)}$$

とかける。 I を a の関数とみて a で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{dI}{da} &= \frac{(-2a + 1)' \cdot 4(3a^2 - 3a + 1) - \{4(3a^2 - 3a + 1)\}' \cdot (-2a + 1)}{\{4(3a^2 - 3a + 1)\}^2} \\ &= \frac{-8(3a^2 - 3a + 1) - 4(6a - 3)(-2a + 1)}{\{4(3a^2 - 3a + 1)\}^2} \\ &= \frac{6a^2 - 6a + 1}{4(3a^2 - 3a + 1)^2}\end{aligned}$$

を得る。 $\frac{dI}{da} > 0$ とすると, $4(3a^2 - 3a + 1)^2 > 0$ であるから, $\frac{dI}{da} > 0 \Leftrightarrow 6a^2 - 6a + 1 > 0$ となる。 a

に関するこの不等式を解くと,

$$a < \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6} < a$$

となる。 $0 < \frac{3 - \sqrt{3}}{6} < \frac{3 + \sqrt{3}}{6} < 1$ であるから, 増減表は以下のようになる。

a	(0)	...	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$	...	$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	...	(1)
$\frac{dI}{da}$		+	0	-	0	+	
I	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{4}\right)$

上表より, I が最小となるのは $a = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$ のときである。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$