

(1)

$$|\vec{a}|=1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}, |\vec{b}|=2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \{f(t)\}^2 &= |t\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= t^2 |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= t^2 - t + 4 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\{f(t)\}^2$ は $t = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{15}{4}$ をとる。 $f(t) \geq 0$ より、 $f(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最小値

$$\sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ をとる。}$$

(答) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

(2)

$t = \sin \theta$ とおくと、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より t のとりうる値の範囲は $-1 \leq t \leq 1$ である。また、

$$\begin{aligned} 3 \cos 2\theta + 4 \sin \theta &= 3(1 - 2 \sin^2 \theta) + 4 \sin \theta \\ &= -6t^2 + 4t + 3 \\ &= -6\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

である。よって、 $-6\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$ の $-1 \leq t \leq 1$ の範囲での最大値・最小値を求めればよい。

$-6\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$ は $t = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{11}{3}$ 、 $t = -1$ のとき最小値 $-6 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3 = -7$ をとる。

(答) 最大値： $\frac{11}{3}$ ，最小値： -7

(3)

真数条件より、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x > -3 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。この条件の下で、

$$\begin{aligned} &\log_2(x+3) - \log_4(x+6) = 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(x+3) - \frac{\log_2(x+6)}{\log_2 4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(x+3) - \frac{\log_2(x+6)}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \log_2(x+3) = \log_2(x+6) + 2 \\ &\Leftrightarrow \log_2(x+3)^2 = \log_2\{4(x+6)\} \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2 = 4(x+6) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+5)(x-3) = 0 \\ &\therefore x = 3 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = 3$

(4)

ユークリッドの互除法の過程より、

$$\begin{aligned} 297 &= 139 \cdot 2 + 19 \\ 139 &= 19 \cdot 7 + 6 \\ 19 &= 6 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

であることを利用すると、

$$\begin{aligned} 1 &= 19 - 6 \cdot 3 \\ &= 19 - (139 - 19 \cdot 7) \cdot 3 \\ &= 19 \cdot 22 - 139 \cdot 3 \\ &= (297 - 139 \cdot 2) \cdot 22 - 139 \cdot 3 \\ &= 297 \cdot 22 + 139 \cdot (-47) \end{aligned}$$

となる。よって、求める整数の組として $(x, y) = (22, -47)$ がある。

(答) $(x, y) = (22, -47)$

$((x, y) = (139k + 22, -297k - 47) \text{ (} k \text{ は整数)})$ の形の組なら可

(1)

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x^2 \\ g(x) = 2x \end{cases}$$

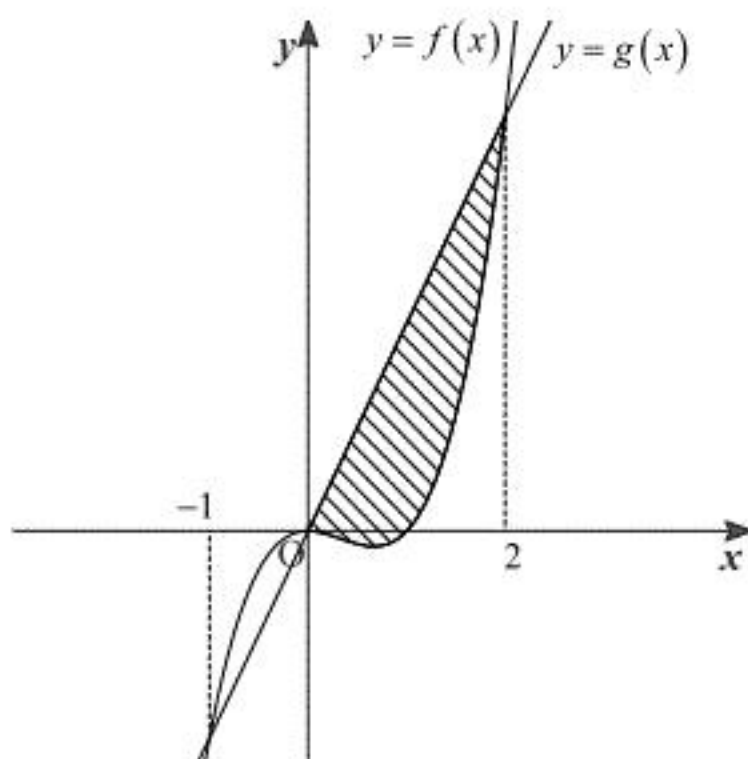
とする。

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - x^2 - 2x \\ &= x(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係は

$$\begin{cases} x = -1, 0, 2 \text{ のとき} & f(x) - g(x) = 0, \text{ すなわち } f(x) = g(x) \\ x < -1, 0 < x < 2 \text{ のとき} & f(x) - g(x) < 0, \text{ すなわち } f(x) < g(x) \\ -1 < x < 0, 2 < x \text{ のとき} & f(x) - g(x) > 0, \text{ すなわち } f(x) > g(x) \end{cases}$$

である。よって、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの上下関係は以下ようになる。



求める面積は上図の斜線部の面積であるから、その値は、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}$

(2)

数列 $\{a_n\}$ は公比 $\frac{5x+1}{x^2+5}$ の等比数列であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることは $-1 < \frac{5x+1}{x^2+5} < 1$ である

ことと同値である。よって、

$$\begin{aligned} -1 < \frac{5x+1}{x^2+5} < 1 \\ \Leftrightarrow -x^2 - 5 < 5x+1 < x^2 + 5 \quad (\because x^2 + 5 > 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 5x - 6 < 0 \\ -x^2 + 5x - 4 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3) > 0 \\ (x-1)(x-4) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3, -2 < x \\ x < 1, 4 < x \end{cases} \\ \Leftrightarrow x < -3, -2 < x < 1, 4 < x \end{aligned}$$

より、求める範囲は $x < -3, -2 < x < 1, 4 < x$ である。

(答) $x < -3, -2 < x < 1, 4 < x$

Ⅲ

(1)(i)

投げる回数が丁度3回であるのは、3回とも表が出た場合のみである。各回の試行は独立であるから、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

である。

(答) $\frac{8}{27}$

(ii)

投げる回数が丁度5回であるのは、4回目までに表が2回、裏が2回出て、5回目に表が出る場合である。よって求める確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

である。

(答) $\frac{16}{81}$

(2)(i)

$$z = \frac{(1+i)^3 (a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \left| \frac{(1+i)^3 (a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2} \right|^2 \\ &= \frac{(|1+i|^2)^3 (|a-i|^2)^2}{2(|a-3i|^2)^2} \\ &= \frac{8(a^2+1)^2}{2(a^2+9)^2} \quad (\because a \text{ は実数}) \\ &= \left\{ \frac{2(a^2+1)}{a^2+9} \right\}^2 \end{aligned}$$

である。 $\frac{2(a^2+1)}{a^2+9} > 0$ であるから、 $|z| = \frac{2(a^2+1)}{a^2+9}$ とわかる。よって、 $|z| = \frac{2}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{2(a^2+1)}{a^2+9} &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 3(a^2+1) &= a^2+9 \quad (\because a^2+9 > 0) \\ \Leftrightarrow a^2 &= 3 \\ \therefore a &= \sqrt{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \sqrt{3}$

(ii)

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ a-i &= \sqrt{3}-i = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ a-3i &= \sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \end{aligned}$$

であるから、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{2}^3 \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \cdot 2^2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}}{\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \left\{ \cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right\}} \\ &= \frac{2}{3} \left(\cos \frac{13}{12}\pi + i \sin \frac{13}{12}\pi \right) \end{aligned}$$

とわかる。 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす z の偏角だから、 $\theta = \frac{13}{12}\pi$ である。

(答) $\theta = \frac{13}{12}\pi$

IV

(1)

[1] $m \neq 0$ のとき、

$$mx + y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -mx + 1$$

より、 l_1 の傾きは $-m$ である。

$$(m+1)x + my = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{m+1}{m}x + \frac{1}{m}$$

より、 l_2 の傾きは $-\frac{m+1}{m}$ である。よって、 l_1, l_2 が平行になるような m は

$$-m = -\frac{m+1}{m}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = m+1 \quad (\because m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

より、 $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。これらは $m \neq 0$ をみたす。また、 l_1, l_2 が垂直になるような m は、

$$-m \cdot \left(-\frac{m+1}{m}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow m+1 = -1$$

$$\Leftrightarrow m = -2$$

より、 $m = -2$ である。これは $m \neq 0$ をみたす。

[2] $m = 0$ のとき

$$\begin{cases} l_1: y = 1 \\ l_2: x = 1 \end{cases}$$

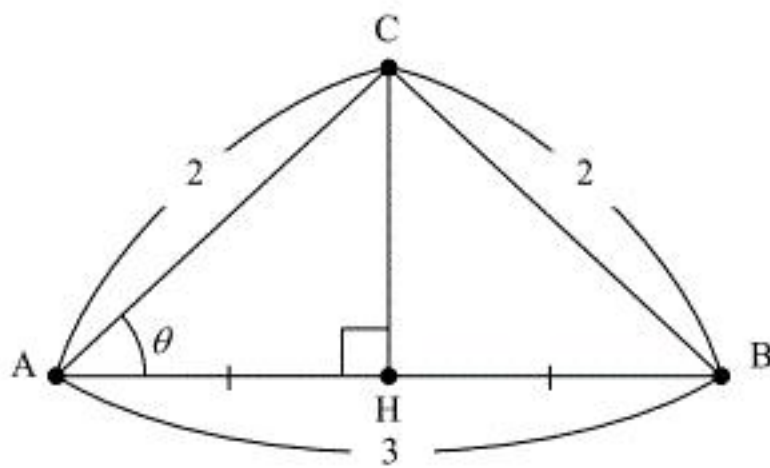
となる。このとき l_1, l_2 は垂直である。

以上、[1], [2] より、 l_1, l_2 が平行になるような m は $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 、垂直になるような m は $-2, 0$ である。

(答) 平行: $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 垂直: $m = -2, 0$

(2)(i)

$BC = CA$ より、頂点 C から辺 AB におろした垂線の足を点 H とすると、 $AH = HB \left(= \frac{3}{2} \right)$ である。 $\triangle ABC$ を図示すると以下ようになる。



$\angle HAC = \angle BAC = \theta$ であり、 $CH \perp HA$ であるから、

$$\cos \theta = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

である。 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

を得る。

(答) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

(ii)

3 倍角の公式より

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^3$$

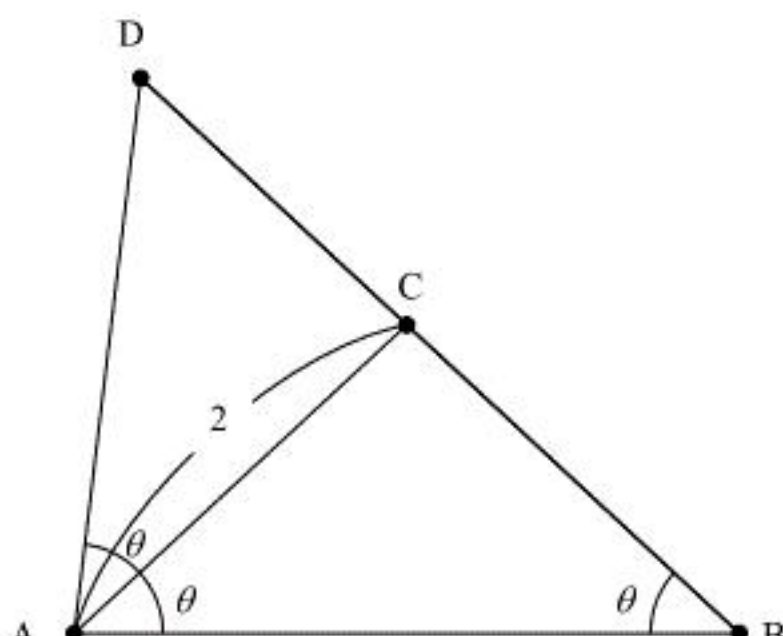
$$= \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

である。

(答) $\frac{5\sqrt{7}}{16}$

(iii)

点 D と $\triangle ABC$ の位置関係は以下ようになる。



$\angle BAD = 2\theta$ より、

$$\begin{aligned} \sin \angle CDA &= \sin \angle ADB \\ &= \sin(\pi - \angle BAD - \angle DBA) \\ &= \sin(\pi - 3\theta) \\ &= \sin 3\theta \end{aligned}$$

である。 $\triangle CAD$ に正弦定理を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{CD}{\sin \angle CAD} &= \frac{AC}{\sin \angle CDA} \\ \Leftrightarrow \frac{CD}{\sin \theta} &= \frac{AC}{\sin 3\theta} \\ \therefore CD &= 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{16}{5\sqrt{7}} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

とわかる。

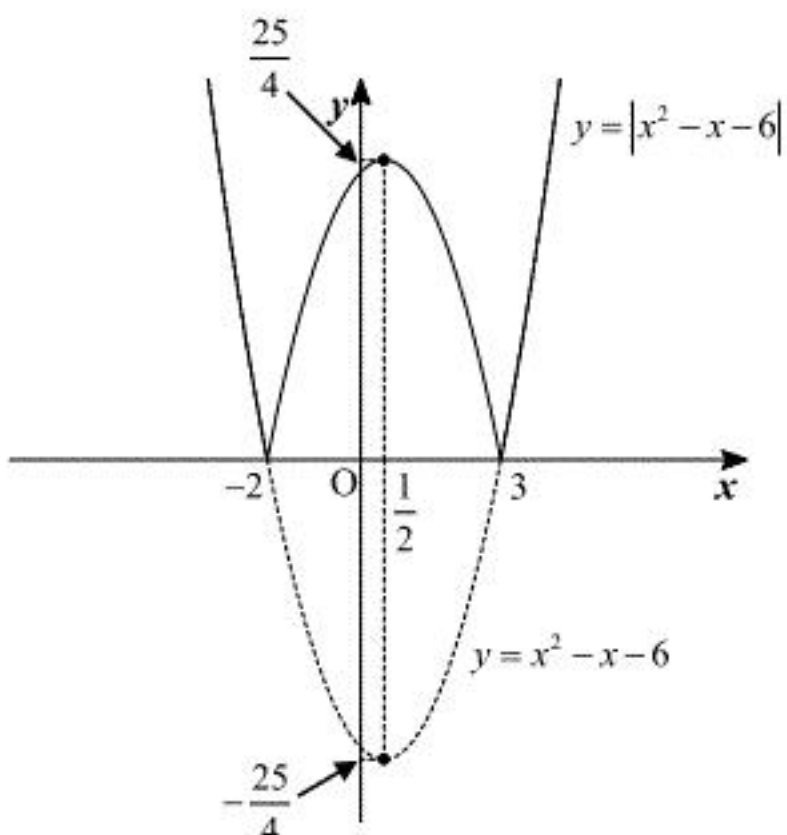
(答) $\frac{8}{5}$

(1)(i)

$y=|x^2-x-6|$ のグラフは、 $y=x^2-x-6$ のグラフの $y<0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返

したグラフとなる。 $x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ および $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ より、

$y=|x^2-x-6|$ のグラフは下図の実線部分のようになる。



(答) 前図

(ii)

$|x^2-x-6|=c$ の実数解の個数は、曲線 $y=|x^2-x-6|$ と直線 $y=c$ の交点の個数である。よって、

(i)の図より、求める実数解の個数は

$$\begin{cases} c < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ c = 0, c > \frac{25}{4} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ c = \frac{25}{4} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 0 < c < \frac{25}{4} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

とわかる。

$$(答) \begin{cases} c < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ c = 0, c > \frac{25}{4} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ c = \frac{25}{4} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 0 < c < \frac{25}{4} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

(2)(i)

$$\begin{aligned} x^4-2x^2-8x-3 &= (x^2+a)^2+b(x+c)^2 \\ \Leftrightarrow x^4-2x^2-8x-3 &= x^4+(2a+b)x^2+2bcx+a^2+bc^2 \end{aligned}$$

より、これが恒等式であるのは

$$\begin{cases} 2a+b=-2 \\ 2bc=-8 \\ a^2+bc^2=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2}b-1 \\ c \neq 0 \text{ かつ } b=-\frac{4}{c} \\ a^2+bc^2=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ a=\frac{2}{c}-1 \\ b=-\frac{4}{c} \\ \left(\frac{2}{c}-1\right)^2-4c=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ a=\frac{2}{c}-1 \\ b=-\frac{4}{c} \\ -c^3+c^2-c+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ a=\frac{2}{c}-1 \\ b=-\frac{4}{c} \\ (c-1)(c^2+1)=0 \end{cases}$$

となるときである。 c は整数であるから、 $c=1$ となり、 $a=1, b=-4, c=1$ を得る。

(答) $a=1, b=-4, c=1$

(ii)

(i)より

$$\begin{aligned} x^4-2x^2-8x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+1)^2-4(x+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x^2+1-2(x+1)\}\{x^2+1+2(x+1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-2x-1)(x^2+2x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \text{ または } x^2+2x+3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x=1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2}i \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $x=1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2}i$