

I

(1)

商の微分公式を用いて関数 y を微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x + 2 \cos x)' (2 \sin x - \cos x) - (\sin x + 2 \cos x) (2 \sin x - \cos x)'}{(2 \sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x - 2 \sin x) (2 \sin x - \cos x) - (\sin x + 2 \cos x) (2 \cos x + \sin x)}{(2 \sin x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{(2 \sin x - \cos x)^2 + (\sin x + 2 \cos x)^2}{(2 \sin x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{5(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2 \sin x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{5}{(2 \sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $y' = -\frac{5}{(2 \sin x - \cos x)^2}$

(2)

分母の実数化を行い、与式を整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1+3i}{2+i} &= a+bi \\ \Leftrightarrow \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} &= a+bi \\ \Leftrightarrow \frac{5-5i}{5} &= a+bi \\ \Leftrightarrow 1+i &= a+bi \end{aligned}$$

となる。 a, b は共に実数であるから、上式の実部と虚部を比較することで、 a, b は $a=b=1$ となる。

(答) $a=b=1$

(3)

さいころの目の出方は全部で $6^3=216$ 通りあり、同様に確からしい。ここで、 a, b, c を 3 辺とする二等辺三角形が成立するための必要十分条件は、 a, b, c のうち少なくとも 2 つが等しい値をとり、かつ三角形の成立条件

$$\begin{cases} a+b > c \\ b+c > a \\ c+a > b \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たすことである。

[1] $a=b=c$ のとき

条件を満たすのは、 $(a, b, c) = (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)$ の 6 通りである。

[2] $a=b, c \neq a$ のとき

このとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{cases} a+a > c \\ a+c > a \\ c+a > a \end{cases} \quad \therefore 2a > c$$

となるから、条件は、 $2a > c$ かつ $a \neq c$ を満たすことである。そのような $(2a, c)$ の組は、下表に○印で示すとおりである。

		$2a$					
		2	4	6	8	10	12
c	1		○	○	○	○	○
	2			○	○	○	○
	3		○		○	○	○
	4			○		○	○
	5			○	○		○
	6				○	○	

表より、条件を満たす a, b, c の組は 21 通りあることがわかる。

$b=c, a \neq b$ や $c=a, b \neq 0$ のときについても、[2] と同じように 21 通りずつある。よって、 a, b, c を 3 辺とする二等辺三角形が成立するような a, b, c の組は [1], [2] より全部で、

$$6+21 \cdot 3=69 \text{ 通り}$$

であることがわかる。以上より求める確率は、

$$\frac{69}{216} = \frac{23}{72}$$

となる。

(答) $\frac{23}{72}$

(4)

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x = x(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$$

となる。ここで、 $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ とおくと、 $P(-2) = 0$ であるから、因数定理より $P(x)$ は $(x+2)$ で割り切れる。よって、

$$\begin{aligned} x(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) &= x(x+2)(x^2 + 2x + 1) \\ &= x(x+2)(x+1)^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x(x+2)(x+1)^2$

(5)

$$\begin{cases} 14520_{(7)} = 1 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 = 4032_{(10)} \\ 110_{(7)} = 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 = 56_{(10)} \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 14520_{(7)} \div 110_{(7)} &= \frac{4032}{56}_{(10)} \\ &= 72_{(10)} \\ &= 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0_{(10)} \\ &= 132_{(7)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $132_{(7)}$

(1)

数列 $\{a_n\}$ は、初項 50、公差 $48-50=-2$ の等差数列である。ゆえに、その一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= -2(n-1) + 50 \\ &= -2n + 52 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = -2n + 52$

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{cases} a_n > 0 & (n \leq 25) \\ a_n = 0 & (n = 26) \\ a_n < 0 & (n \geq 27) \end{cases}$$

であるから、

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_{24} < S_{25} = S_{26} > S_{27} > \cdots$$

となる。このことから、 S_n の値が最大となる n の値は $n=25, 26$ であり、そのときの S_n 値は、

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \{50 + (-2 \cdot 25 + 52)\} \\ &= 650 \end{aligned}$$

となる。

(答) $n=25, 26$ のとき、最大値 650

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= (15, 7) - (3, 2) \\ &= (12, 5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} \\ &= (6, 6) - (3, 2) \\ &= (3, 4)\end{aligned}$$

であるから、

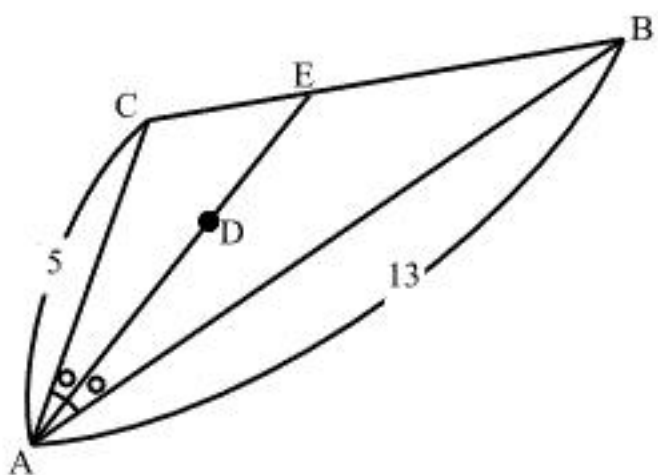
$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{12^2 + 5^2} \\ &= 13 \\ |\overline{AC}| &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{AB} = (12, 5), |\overline{AB}| = 13, \overline{AC} = (3, 4), |\overline{AC}| = 5$$

(2)

点Dは△ABCの内心であるから、直線ADは∠CABを二等分する。



ゆえに、角の二等分線の性質より、

$$\begin{aligned}BE:CE &= AB:AC \\ \Leftrightarrow BE:CE &= 13:5\end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、点Eは線分BCを13:5に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overline{OE} &= \frac{5}{18}\overline{OB} + \frac{13}{18}\overline{OC} \\ &= \left(\frac{17}{2}, \frac{113}{18}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore E\left(\frac{17}{2}, \frac{113}{18}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{17}{2}, \frac{113}{18}\right)$$

(3)

直線ADと直線AEは一致するから、(3)の結果を用いると、直線ADの方程式は、

$$\begin{aligned}y-2 &= \frac{2-\frac{113}{18}}{3-\frac{17}{2}}(x-3) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{7}{9}x - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

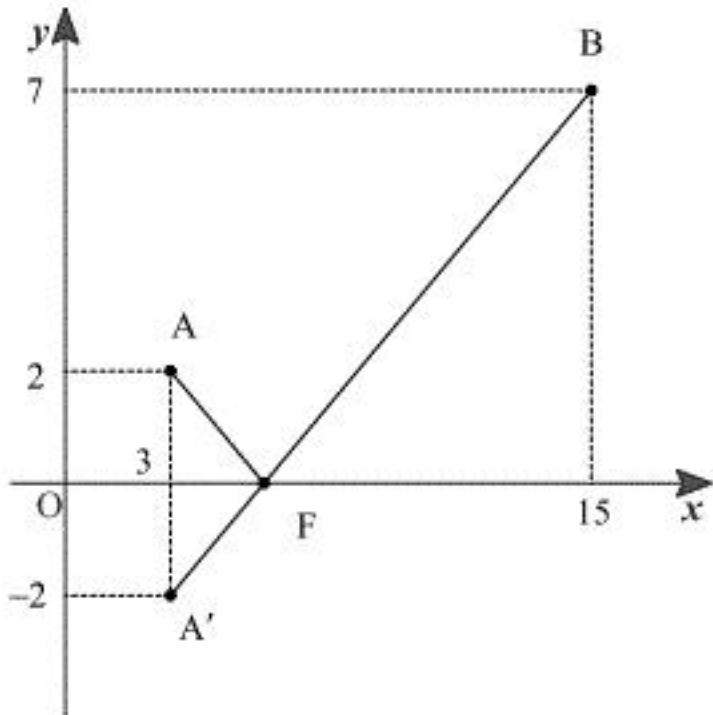
$$(\text{答}) \quad y = \frac{7}{9}x - \frac{1}{3}$$

(4)

x軸に関して点Aと対称な点をA'とおく。すなわち、A'(3, -2)である。このとき、

$$|\overline{AF}| + |\overline{FB}| = |\overline{A'F}| + |\overline{FB}|$$

であるから、 $|\overline{A'F}| + |\overline{FB}|$ が最小値をとるとき、 $|\overline{AF}| + |\overline{FB}|$ も最小値をとる。



$|\overline{A'F}| + |\overline{FB}|$ が最小値をとるのは、上図のように3点A', B, Fが一直線上に並ぶときである。こ

のとき、図より、 $|\overline{AF}| + |\overline{FB}| = |\overline{A'F}| + |\overline{FB}| = |\overline{A'B}|$ となるから、求める最小値は、

$$\begin{aligned}|\overline{A'B}| &= \sqrt{(3-15)^2 + (-2-7)^2} \\ &= 15\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 15$$

Ⅳ

(1)

$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} kx^3 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x \left(x - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) &= 0 \quad (\because k > 0) \\ \therefore x &= 0, \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

となるから, $y = f(x)$ のグラフと x 軸は, 3 点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}, 0\right), (0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, 0\right)$ で交わる。 $a < b < c$

より, $a = -\frac{1}{\sqrt{k}}, b = 0, c = \frac{1}{\sqrt{k}}$ となる。

$$(\text{答}) \quad A\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}, 0\right), B(0, 0), C\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, 0\right)$$

(2)

$f(x) = kx^3 - x$ について,

$$f'(x) = 3kx^2 - 1$$

であるから, 直線 ℓ_1 の方程式は,

$$\begin{aligned} y - 0 &= (3k \cdot 0^2 - 1)(x - 0) \\ \Leftrightarrow y &= -x \end{aligned}$$

であり, 直線 ℓ_2 の方程式は,

$$\begin{aligned} y - 0 &= \left\{ 3k \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 - 1 \right\} \left(x - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \\ y &= 2x - \frac{2}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

とわかる。これより, 点 P の x 座標は,

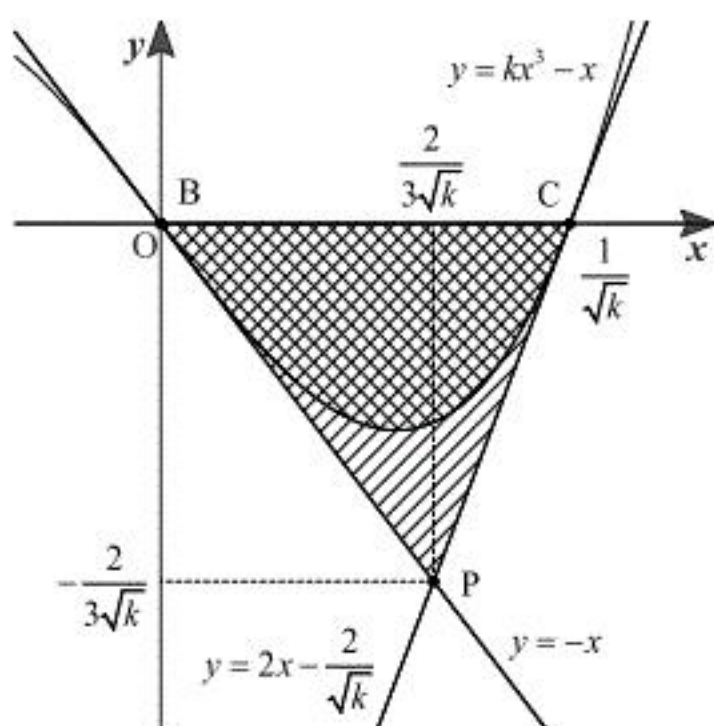
$$\begin{aligned} -x &= 2x - \frac{2}{\sqrt{k}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3\sqrt{k}} \end{aligned}$$

となる。これを $y = -x$ に代入して, 点 P の y 座標は, $-\frac{2}{3\sqrt{k}}$ とわかる。よって, 点 P の座標は

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{k}}, -\frac{2}{3\sqrt{k}} \right) \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad \text{直線 } \ell_1: y = -x, \text{ 直線 } \ell_2: y = 2x - \frac{2}{\sqrt{k}}, \quad P\left(\frac{2}{3\sqrt{k}}, -\frac{2}{3\sqrt{k}}\right)$$

(3)



上図における右肩上がりの斜線部分の面積が S_1 , 右肩下がりの斜線部分の面積が S_2 である。

図より,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \left| -\frac{2}{3\sqrt{k}} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{3k} \\ S_2 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \left\{ -\left(kx^3 - x \right) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} kx^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \\ &= -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} \\ &= \frac{1}{4k} \end{aligned}$$

となる。このことから,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +0} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{k \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{3k}}{\frac{1}{4k}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{1}{3k}, S_2 = \frac{1}{4k}, \lim_{k \rightarrow +0} \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$$