

(1)

求める確率は

$$\frac{{}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_{15}C_4} = \frac{12}{91}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{12}{91}$$

(2)

 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるから、ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行のとき、実数 t を用いて

$$t\vec{a} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow t(1, 2) = (x-2, x)$$

$$\Leftrightarrow (t, 2t) = (x-2, x)$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{cases} t = x-2 \\ 2t = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

となる。よって、 $\vec{b} = (2, 4)$ であるから、その大きさは

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) x=4, \text{大きさ } 2\sqrt{5}$$

(1)

$x=1$ の微分係数を、微分の定義に従って求めると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2}h \right) = 1$$

となる。

(答) 1

(2)

$y = \frac{1}{2}x^2$ について、 $y' = x$ であるから、点 P における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

であり、点 Q における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = (-1) \cdot (x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = -x - \frac{1}{2}$$

である。この 2 直線の傾きの積は

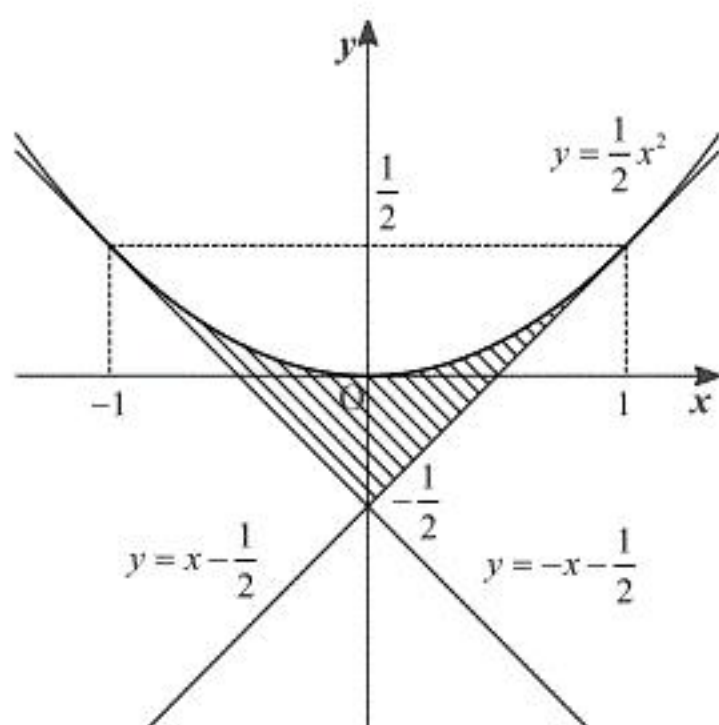
$$1 \cdot (-1) = -1$$

であるから、この 2 直線は直交する。

(証明終)

(3)

(2)の結果より、求める面積は下図斜線部の面積である。



斜線部は y 軸について対称であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx &= \int_0^1 (x-1)^2 dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(1)

2を法として1と合同な整数は、6を法として1, 3, 5のいずれかと合同である。また、3を法として2と合同な整数は、6を法として2, 5のいずれかと合同である。よって、ある整数が2を法として1と合同であり、かつ3を法として2と合同であることの必要十分条件は、6を法として5と合同であることである。 $-100 = 6 \cdot (-17) + 2$ より、このような条件を満たす整数のうち、 S に含まれる最小のものは -97 であるから、数列 $\{a_n\}$ は、初項 -97 、公差6の等差数列となる。ゆえに求める一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 6(n-1) - 97 \\ &= 6n - 103 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $-100 \leq a_n \leq 200$ であるから

$$6n - 103 \leq 200$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{101}{2}$$

$$\therefore n \leq 50$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 6n - 103 \quad (n = 1, 2, \dots, 50)$$

(2)

(1)と同様に考える。5を法として3と合同な整数は、35を法として3, 8, 13, 18, 23, 28, 33のいずれかと合同であり、また、7を法として4と合同な整数は、35を法として4, 11, 18, 25, 32のいずれかと合同である。よって、ある整数が5を法として3と合同であり、かつ7を法として4と合同であることの必要十分条件は、35を法として18と合同であることである。

$200 = 35 \cdot 5 + 25$ より、このような条件を満たす整数のうち、 S に含まれる最大のものは193であるから、数列 $\{b_n\}$ は、初項193、公差 -35 の等差数列となる。ゆえに求める一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= -35(n-1) + 193 \\ &= -35n + 228 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $-100 \leq b_n \leq 200$ であるから

$$-100 \leq -35n + 228$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{328}{35}$$

$$\therefore n \leq 9$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = -35n + 228 \quad (n = 1, 2, \dots, 9)$$

(3)

数列 $\{b_n\}$ の項を具体的に求めると、193, 158, 123, 88, 53, 18, -17 , -52 , -87 となる。この9つの整数のうち、6を法として5と合同な整数、すなわち数列 $\{a_n\}$ に含まれる整数は53のみである。

(1)

現在から r 年後の発芽率を b_r とおく。ただし r は実数である。発芽率は 2 年毎に半減することから、 r を用いて b_r を表すと

$$b_r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} b_0$$

となるので、求める発芽率は $r=8$ として

$$\begin{aligned} b_8 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{2}} b_0 \\ &= \frac{1}{16} b_0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{16} b_0$$

(2)

$$b_r = \left(\frac{1}{100}\right) b_0 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{100}\right) b_0 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} b_0 \\ \Leftrightarrow 2^r &= 10^4 \\ \Leftrightarrow r \log_{10} 2 &= 4 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{4}{\log_{10} 2} \end{aligned}$$

であるから、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ として

$$r = \frac{4}{0.3010} = 13.289036 \dots$$

となる。小数第 5 位を四捨五入して

$$r = 13.2890$$

となるから、したがって求める年数は 13.2890 年となる。

$$(\text{答}) \quad 13.2890 \text{ 年}$$