

**1**

$k$  を実数とし、2 次方程式

$$x^2 + kx + 3 = 0$$

の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とする。

(1) 等式  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$  が成り立つように  $k$  を定めよ。

(2)  $k > 0$  のとき、 $\alpha^3 + \beta^3$  の最大値とそれを与える  $k$  を求めよ。

(25 点)

**2**

平面上の2点  $A(-4, 0)$ ,  $B(12, 0)$  に対して

$$PA : PB = 5 : 3$$

となる点  $P(x, y)$  の軌跡を表す方程式を求めよ。またこの軌跡上の点で、  
点  $C(1, 20)$  に最も近いものを求めよ。

(25点)

**3**自然数  $n$  に対して

$$f_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

とおく。ただし、 $\sin \theta \neq 0$  とする。 $n \geq 2$  に対して次の間に答えよ。

(1)  $f_n(\theta) = 0$  のとき、 $f_{n+1}(\theta)f_{n-1}(\theta)$  を求めよ。

(2)  $f_n(\theta)^2 = 1$  のとき、 $f_{n+1}(\theta)f_{n-1}(\theta)$  を求めよ。

(25 点)

4

$a$  を  $0 \leq a \leq 1$  を満たす実数とし、数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = a$$

$$\begin{cases} a_n \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} & a_{n+1} = 2a_n \\ a_n > \frac{1}{2} \text{ のとき} & a_{n+1} = 2 - 2a_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。

(1)  $a_3 = \frac{1}{2}$  となるような  $a$  をすべて求めよ。

(2) すべての自然数  $n$  について  $a_n = a_{n+2}$  が成り立つとする。このような  $a$  をすべて求めよ。

(25点)