

1

(1)

$$2x^2-ax+a=0$$

の判別式を D としたとき、 $D \geq 0$ であれば α, β は実数となるので、

$$\begin{aligned} D &= a^2 - 4 \cdot 2a \\ &= a^2 - 8a \\ &= a(a-8) \\ &\geq 0 \\ \therefore a \leq 0, 8 \leq a \end{aligned}$$

となる。

(答) $a \leq 0, 8 \leq a$

(2)

$2x^2-ax+a=0$ の解は解の公式より、

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8a}}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

[1] $a \leq 0$ のとき、

$$0 \leq a^2 \leq a^2 - 8a$$

より、

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 8a}}{4} \geq 0, \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - 8a}}{4} \leq 0$$

となるので、

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 8a}}{4} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 8a}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - 8a}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| &= 5 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a - 100 &= 0 \\ \therefore a &= 4 \pm 2\sqrt{29} \end{aligned}$$

であり、 $a \leq 0$ より、

$$a = 4 - 2\sqrt{29}$$

となる。

[2] $a \geq 8$ のとき、

$$0 \leq a^2 - 8a \leq a^2$$

より、

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 8a}}{4} \geq 0, \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - 8a}}{4} \geq 0$$

となるので、

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 8a}}{4} + \frac{a - \sqrt{a^2 - 8a}}{4} \\ &= \frac{a}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 10$$

これは $a \geq 8$ を満たす。

[1], [2]より、

$$a = 4 - 2\sqrt{29}, 10 \quad \dots \text{(答)}$$

(答) $a = 4 - 2\sqrt{29}, 10$

(2)(別解)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{a}{2} & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = \frac{a}{2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。一方、

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| &= 5 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| &= 25 & \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。 $\alpha\beta$ の正負で場合分けして考える。

[1] $\alpha\beta > 0$ 、すなわち $a > 0$ のとき、

③の左辺は

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta &= (\alpha + \beta)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となるので③は

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| &= 25 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 100 \\ \Leftrightarrow a &= \pm 10 \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ より、

$$\therefore a = 10$$

これは(1)の $a \leq 0, 8 \leq a$ という条件に合う。

[2] $\alpha\beta \leq 0$ 、すなわち $a \leq 0$ のとき、

③の左辺は

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{a^2}{4} - 2a \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \end{aligned}$$

となる。よって③は

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| &= 25 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a - 100 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 4 \pm 2\sqrt{29} \end{aligned}$$

$a \leq 0$ より、

$$\therefore a = 4 - 2\sqrt{29}$$

これは(1)の $a \leq 0, 8 \leq a$ という条件に合う。

[1], [2]より、

$$a = 4 - 2\sqrt{29}, 10$$

となる。

(答) $a = 4 - 2\sqrt{29}, 10$

2

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \dots \textcircled{1}$$

(i)の条件より、 $f'(2), f'(3)$ は0となるので、 x^2 の係数が3であることに注意すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-2)(x-3) \\ &= 3x^2 - 15x + 18 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。(ii)の条件より、

$$\begin{aligned} f(2) + f(3) &= (8 + 4a + 2b + c) + (27 + 9a + 3b + c) \\ &= 35 + 13a + 5b + 2c = 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であることが必要である。①と②の係数を比較して、

$$\begin{cases} 2a = -15 & \dots \textcircled{4} \\ b = 18 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

④より、

$$a = -\frac{15}{2} \quad \dots \textcircled{6}$$

⑤、⑥を③に代入して、

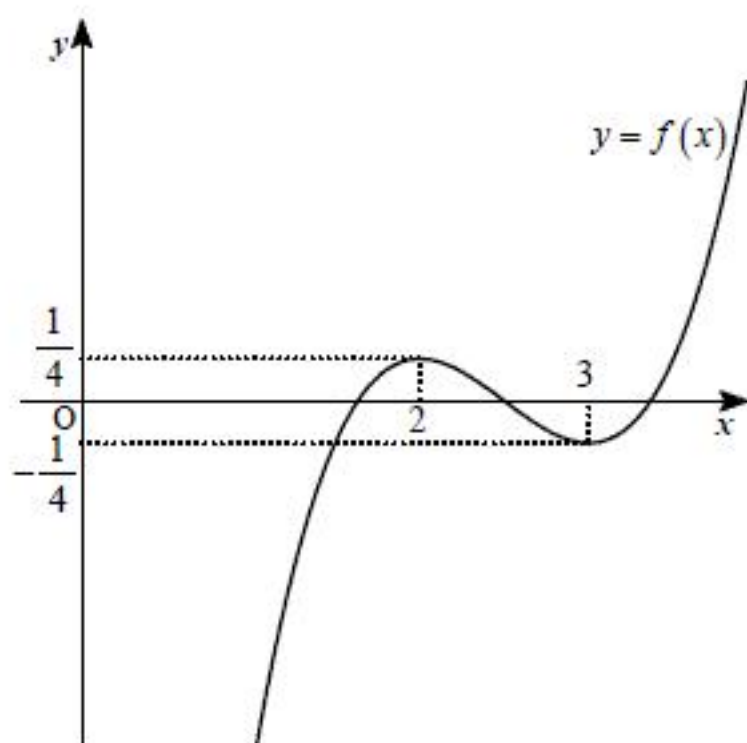
$$\begin{aligned} 35 - \frac{195}{2} + 90 + 2c &= 0 \\ \therefore c &= -\frac{55}{4} \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

よって、考えられる $f(x)$ は⑤、⑥、⑦を与式に代入して、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x - \frac{55}{4} \\ f'(x) &= 3x^2 - 15x + 18 \\ &= 3(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

よって、増減表は以下のようになり、グラフは下図のようになるので確かに(i),(ii)の条件を満たす。

x	$\dots$	2	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$



(答) $a = -\frac{15}{2}, b = 18, c = -\frac{55}{4}$

(注)

a, b については実際に

$$f'(2) = 12 + 4a + b = 0$$

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 0$$

を連立して解くこともできる

$$\log_2(a+4^x) = x+1$$

$$\Leftrightarrow a+4^x = 2^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + a = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)^2 = 1 - a$$

より、左辺は実数であるから $a > 1$ のとき上方程式は解を持たない。したがって、

$$a \leq 1$$

である。このとき、

$$2^x - 1 = \pm \sqrt{1-a} \quad (\because a \leq 1)$$

$$2^x = 1 \pm \sqrt{1-a} \quad (\because a \leq 1)$$

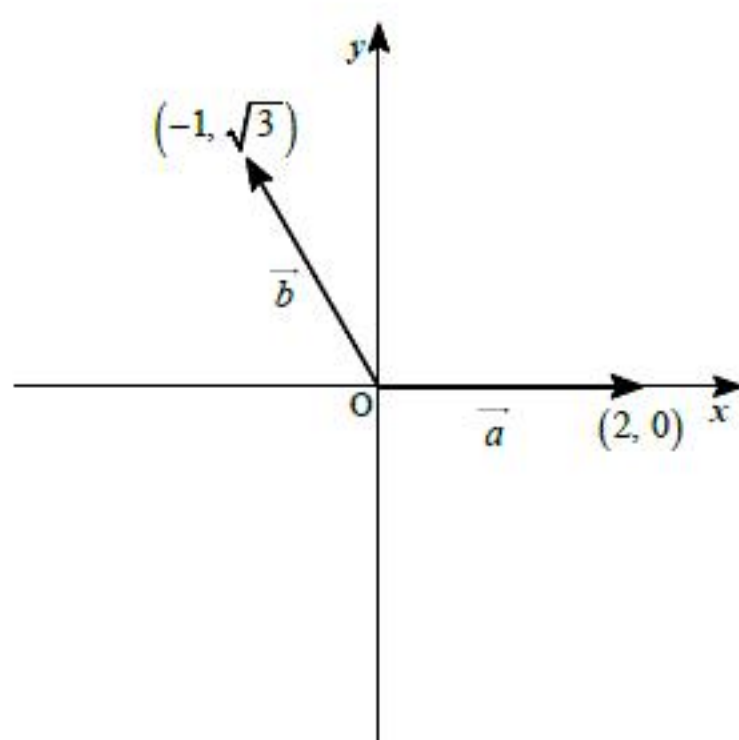
2^x が正の値のみをとることを考慮すれば、

$$2^x = \begin{cases} 1 + \sqrt{1-a} & (a \leq 0 \text{ のとき}) \\ 1 \pm \sqrt{1-a} & (0 < a \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\therefore x = \begin{cases} \log_2(1 + \sqrt{1-a}) & (a \leq 0 \text{ のとき}) \\ \log_2(1 \pm \sqrt{1-a}) & (0 < a \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と求まる。ただし、 $a > 1$ のとき解は存在しない。

$$(\text{答}) \quad x = \begin{cases} \log_2(1 + \sqrt{1-a}) & (a \leq 0 \text{ のとき}) \\ \log_2(1 \pm \sqrt{1-a}) & (0 < a \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



上図のように、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の始点を原点にとり、

$$\vec{a} = (2, 0), \vec{b} = (-1, \sqrt{3})$$

ととっても一般性は失われない。このとき、2 点 A, B を

$$A(2, 0), B(-1, \sqrt{3})$$

とおき、 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とおくと、点 P は線分 AB を直径とする円の円周上にある。この円は、中心が AB の中点である $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、半径が $\sqrt{3}$ であるので、P が取りうる点の x 座標、y 座標は、

$0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cos \theta & \dots \textcircled{1} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \sin \theta & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

と書ける。このとき、

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= x^2 + y^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} + \sqrt{3} \cos \theta + 3 \cos^2 \theta\right) + \left(\frac{3}{4} + 3 \sin \theta + 3 \sin^2 \theta\right) \quad (\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}) \\ &= 1 + 3(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \\ &= 4 + 3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \\ &= 4 + 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta\right) \\ &= 4 + 2\sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

これは、

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき、最大値} & \quad 4 + 2\sqrt{3} \\ \theta = \frac{4}{3}\pi \text{ のとき、最小値} & \quad 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

をとる。①、②より、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおき、これを解くと、

$$2m - n = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\sqrt{3}n = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

④より、

$$n = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$

⑤を③に代入、整理して、

$$\begin{aligned} 2m &= 1 + \sqrt{3} \\ \therefore m &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

故に、

$$\vec{p} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{a} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{b}$$

と書けることがわかる。よって、 $|\vec{p}|$ の最大値は

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

で、そのとき

$$\vec{p} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{a} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{b}$$

と書ける。①、②より、 $\theta = \frac{4}{3}\pi$ のとき、P の x, y 座標は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{4}{3}\pi = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{4}{3}\pi = \frac{\sqrt{3} - 3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3} - 3}{2} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおき、これを解くと、

$$\begin{cases} \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 2r - q & \dots \textcircled{6} \\ \frac{\sqrt{3} - 3}{2} = \sqrt{3}q & \dots \textcircled{7} \end{cases}$$

⑦より、

$$q = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{8}$$

⑧を⑥に代入、整理して、

$$r = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

故に、

$$\vec{p} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \vec{a} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \vec{b}$$

と書けることが分かる。よって、 $|\vec{p}|$ の最小値は

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

で、そのとき

$$\vec{p} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \vec{a} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \vec{b}$$

と書ける。

$$\begin{aligned} & \text{最大値 } 1 + \sqrt{3} \quad (\vec{p} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{a} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{b} \text{ のとき}) \\ & \text{(答)} \\ & \text{最小値 } \sqrt{3} - 1 \quad (\vec{p} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \vec{a} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \vec{b} \text{ のとき}) \end{aligned}$$