

(1)

コインの表が出たときは6の目が出ればよい。コインの裏が出たときに投げる片方のサイコロの目が a 、もう片方のサイコロの目が b のときを (a, b) と定義すると、裏が出たときのサイコロの目は、

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

であればよい。したがって求める確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{36} = \frac{11}{72}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{11}{72}$$

(2)

サイコロを1回投げて出る目の期待値は、

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} &= \frac{21}{6} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、コインの表が出たときの得点の期待は $\frac{7}{2}$ である。コインの裏が出たときはサイコロを2個投げるので、得点の期待値は

$$\frac{7}{2} \cdot 2 = 7$$

である。コインの表が出る確率、裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ なので、求める期待値は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{21}{4}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{21}{4}$$

(1)

3つの放物線 C_1, C_2, C_3 の方程式をそれぞれ平方完成すると,

$$y = x^2 + 6$$

$$y = x^2 - 4x + 8$$

$$= (x-2)^2 + 4$$

$$y = x^2 - 12x + 48$$

$$= (x-6)^2 + 12$$

となるので, 3つの放物線 C_1, C_2, C_3 の頂点はそれぞれ $(0, 6), (2, 4), (6, 12)$ である。2次関数 $y = f(x)$ を,

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

とにおいて各頂点の座標を代入すると,

$$\begin{cases} 6 = c \\ 4 = 4a + 2b + c \\ 12 = 36a + 6b + c \end{cases}$$

となるのでこれを計算すると,

$$a = \frac{1}{2}, b = -2, c = 6$$

となる。したがって,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

(2)

2次関数 $y = g(x)$ のグラフが放物線 C_1, C_2, C_3 と接するための条件は, 3つの2次方程式

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 6 \\ g(x) = x^2 - 4x + 8 \\ g(x) = x^2 - 12x + 48 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

がそれぞれ重解を持つ条件と一致する。 $g(x) = px^2 + qx + r$ として①に代入すると,

$$(p-1)x^2 + qx + r - 6 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(p-1)x^2 + (q+4)x + r - 8 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(p-1)x^2 + (q+12)x + r - 48 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。②, ③, ④の判別式をそれぞれ D_2, D_3, D_4 とすると,

$$\begin{cases} D_2 = q^2 - 4(p-1)(r-6) = 0 \\ D_3 = (q+4)^2 - 4(p-1)(r-8) = 0 \\ D_4 = (q+12)^2 - 4(p-1)(r-48) = 0 \end{cases}$$

となる。これを計算すると,

$$p = \frac{1}{3}, q = -\frac{4}{3}, r = \frac{16}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$$

(3)

$f(x) - g(x)$ を平方完成すると,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6}(x-2)^2 \end{aligned}$$

となる。すべての実数 x において $\frac{1}{6}(x-2)^2 \geq 0$ であるので $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ と

なり, 題意は示された。

(証明終)

3

(1)

a_n の一般項は、

$$a_n = -10 + d(n-1)$$

であるので、一般項の式に $n=5$ を代入して

$$a_5 = -10 + 4d \leq 0$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{5}{2}$$

となる。

$a_1 < 0$ であり、 $a_5 \leq 0$ なので、 a_1, a_2, a_3, a_4 は負の数である。したがって S の値を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{k=1}^5 a_k \\ &= -\sum_{k=1}^5 \{-10 + d(k-1)\} \\ &= -\sum_{k=1}^5 (dk - 10 - d) \\ &= -d \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 (-10 - d) \\ &= -d \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 - 5(-10 - d) \\ &= -10d + 50 \end{aligned}$$

となる。 $d \leq \frac{5}{2}$ なので、求める S の範囲は、

$$S \geq -10 \cdot \frac{5}{2} + 50 = 25$$

である。

$$(\text{答}) \quad d \leq \frac{5}{2}, S \geq 25$$

(2)

(1)と同様にして、

$$a_5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{5}{2}$$

となる。また、 a_n の一般項の式に $n=4$ を代入して、

$$a_4 = -10 + 3d \leq 0$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{10}{3}$$

となる。以上より、 $\frac{5}{2} \leq d \leq \frac{10}{3}$ となる。

公差が正の数なので $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ であり、 $a_4 \leq 0$ なので a_1, a_2, a_3 は負の数である。 $a_5 \geq 0$ より S の値を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{k=1}^4 a_k + a_5 \\ &= -\sum_{k=1}^4 \{-10 + d(k-1)\} - 10 + 4d \\ &= -\sum_{k=1}^4 (dk - 10 - d) - 10 + 4d \\ &= -d \sum_{k=1}^4 k - \sum_{k=1}^4 (-10 - d) - 10 + 4d \\ &= -d \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 - 4(-10 - d) - 10 + 4d \\ &= -2d + 30 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{5}{2} \leq d \leq \frac{10}{3}$ なので、

$$S \leq -2 \cdot \frac{5}{2} + 30 = 25$$

$$S \geq -2 \cdot \frac{10}{3} + 30 = \frac{70}{3}$$

となる。以上より、 $\frac{70}{3} \leq S \leq 25$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2} \leq d \leq \frac{10}{3}, \frac{70}{3} \leq S \leq 25$$

(3)

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の正負によって場合分けする。

[1] $a_5 \leq 0$ のとき

(1)の答より $S \geq 25$ となるので $S=24$ を満たさず不適である。

[2] $a_4 \leq 0 \leq a_5$ のとき

(2)で求めた S の式より、

$$S = -2d + 30 = 24$$

$$\Leftrightarrow d = 3$$

となる。(2)の答より、 $a_4 \leq 0 \leq a_5$ を満たす d の範囲は $\frac{5}{2} \leq d \leq \frac{10}{3}$ である。 $d=3$ はこの条件を満たす。

[3] $a_3 \leq 0 \leq a_4$ のとき

a_n の一般項に $n=3, n=4$ をそれぞれ代入して、

$$a_3 = -10 + 2d \leq 0$$

$$\Leftrightarrow d \leq 5$$

$$a_4 = -10 + 3d \geq 0$$

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{10}{3}$$

となり、 $\frac{10}{3} \leq d \leq 5$ が導かれる。公差が正の数なので $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ であり、 $a_3 \leq 0$ なので a_1, a_2 は負の数である。 $a_4 \geq 0, a_5 \geq 0$ より S の値を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{k=1}^3 a_k + \sum_{k=4}^5 a_k \\ &= -\sum_{k=1}^3 \{-10 + d(k-1)\} + \sum_{k=4}^5 \{-10 + d(k-1)\} \\ &= -\sum_{k=1}^3 (dk - 10 - d) + \sum_{k=4}^5 (dk - 10 - d) \\ &= -d \sum_{k=1}^3 k - \sum_{k=1}^3 (-10 - d) + d \sum_{k=4}^5 k + \sum_{k=4}^5 (-10 - d) \\ &= -d \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 - 3(-10 - d) + d(4+5) + 2(-10 - d) \\ &= 4d + 10 = 24 \\ \therefore d &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。これは条件 $\frac{10}{3} \leq d \leq 5$ を満たす。

[4] $a_2 \leq 0 \leq a_3$ のとき

a_n の一般項に $n=2, n=3$ をそれぞれ代入して、

$$a_2 = -10 + d \leq 0$$

$$\Leftrightarrow d \leq 10$$

$$a_3 = -10 + 2d \geq 0$$

$$\Leftrightarrow d \geq 5$$

となり、 $5 \leq d \leq 10$ が導かれる。公差が正の数なので $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ であり、 $a_2 \leq 0$ なので a_1 は負の数である。 $a_3 \geq 0, a_4 \geq 0, a_5 \geq 0$ より S の値を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{k=1}^2 a_k + \sum_{k=3}^5 a_k \\ &= -\sum_{k=1}^2 \{-10 + d(k-1)\} + \sum_{k=3}^5 \{-10 + d(k-1)\} \\ &= -\sum_{k=1}^2 (dk - 10 - d) + \sum_{k=3}^5 (dk - 10 - d) \\ &= -d \sum_{k=1}^2 k - \sum_{k=1}^2 (-10 - d) + d \sum_{k=3}^5 k + \sum_{k=3}^5 (-10 - d) \\ &= -d(1+2) + 2(10+d) + d(3+4+5) + 3(-10-d) \\ &= 8d - 10 = 24 \\ \Leftrightarrow d &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

となる。これは条件 $5 \leq d \leq 10$ を満たさないので不適である。

[5] $a_1 \leq 0 \leq a_2$ のとき

$a_1 = -10$ なので $a_1 \leq 0$ を満たす。 a_n の一般項に $n=2$ を代入して、

$$a_2 = -10 + d \geq 0$$

$$\Leftrightarrow d \geq 10$$

となる。 $a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 \geq 0, a_5 \geq 0$ より S の値を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= |a_1| + \sum_{k=2}^5 a_k \\ &= 10 + \sum_{k=2}^5 a_k \\ &= 10 + \sum_{k=2}^5 \{-10 + d(k-1)\} \\ &= 10 + \sum_{k=2}^5 (dk - 10 - d) \\ &= 10 + d \sum_{k=2}^5 k + \sum_{k=2}^5 (-10 - d) \\ &= 10 + d \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 - 1 \right) + 4(-10 - d) \\ &= 10d - 30 = 24 \\ \Leftrightarrow d &= \frac{27}{5} \end{aligned}$$

となる。これは条件 $d \geq 10$ を満たさないので不適である。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より、求める d の値は

$$d = 3, \frac{7}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad d = 3, \frac{7}{2}$$

点 $(1, 1)$ を通る傾き m の直線を ℓ とすると, ℓ の方程式は,

$$y = m(x-1) + 1$$

である。直線 ℓ と放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ の交点の座標を求めるために2式を連立して y を消去すると,

$$\frac{1}{2}x^2 = m(x-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= m^2 - (2m - 2) \\ &= m^2 - 2m + 2 \\ &= (m-1)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

となるので, ①には異なる実数解が2つ存在する。①の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると,

$$\begin{aligned} \alpha &= m - \sqrt{m^2 - 2m + 2} \\ \beta &= m + \sqrt{m^2 - 2m + 2} \end{aligned}$$

となる。また, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - m(x-1) - 1$ とすると,

$$f'(x) = x - m$$

となるので, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	m	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$

$\sqrt{m^2 - 2m + 2} > 0$ より $\alpha < m < \beta$ であり,

$$\begin{aligned} f(m) &= -\frac{1}{2}m^2 + m - 1 \\ &= -\frac{1}{2}(m^2 - 2m) - 1 \\ &= -\frac{1}{2}(m-1)^2 - \frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

であるので, $\alpha \leq x \leq \beta$ において

$$f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m(x-1) + 1 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$$

となり, 直線 ℓ が放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ の上側に存在する。以上より,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ m(x-1) + 1 - \frac{1}{2}x^2 \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - 2mx + 2m - 2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \right\} \\ &= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

となるのでこの式に $\alpha = m - \sqrt{m^2 - 2m + 2}$, $\beta = m + \sqrt{m^2 - 2m + 2}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{12} \left(2\sqrt{m^2 - 2m + 2} \right)^3 \\ &= \frac{2}{3} (m^2 - 2m + 2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{2}{3} > 0$, $\frac{3}{2} > 0$ より, S が最小になるための条件は関数 $g(m) = m^2 - 2m + 2$ が最小になる

ための条件と一致する。 $g(m)$ の式を変形すると,

$$g(m) = (m-1)^2 + 1$$

となる。 $(m-1)^2 \geq 0$ であり $m=1$ のとき $(m-1)^2 = 0$ となるので, $m=1$ のとき関数 $g(m)$ は最

小値1をとる。以上より, $m=1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となり S が最小値 $\frac{2}{3}$ をとる。

(答) $m=1$

最小値: $\frac{2}{3}$