

(1)

n の百の位の数字を a 、十の位の数字を b 、一の位の数字を c とする。 n は 10 の倍数でないの
で、整数 a, b, c は

$$1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 1 \leq c \leq 9$$

をみたす。よって、10 の倍数でない 3 桁の自然数は

$$9 \times 10 \times 9 = 810$$

個ある。

(答) 810 個

(2)

$n = 100a + 10b + c, n' = a + 10b + 100c$ であるから

$$n' > n$$

$$\Leftrightarrow a + 10b + 100c > 100a + 10b + c$$

$$\therefore c > a$$

となる。 $c > a$ をみたす (a, c) の組み合わせは、1 から 9 までの整数から異なる 2 つを選び、小
さい順に a, c とすればよいから

$${}_9C_2 = 36$$

通りある。このそれぞれの場合について、 b の値は 0 から 9 までの 10 通りが考えられるから、
求める個数は

$$36 \times 10 = 360$$

個となる。

(答) 360 個

(3)

$$\begin{aligned} n + n' &= (100a + 10b + c) + (a + 10b + 100c) \\ &= 101(a + c) + 20b \end{aligned}$$

となる。これが 1000 以上となる条件を、 $a + c$ の値で場合分けをして考える。

[1] $a + c \geq 10$ のとき

$a = 1$ のとき $c = 9$ となり、 $a = 2$ のとき $c = 8, 9$ となり、同様に続いて、 $a = 9$ のとき
 $c = 1, 2, \dots, 9$ となるから、 $a + c \geq 10$ をみたす (a, c) の組み合わせは

$$1 + 2 + \dots + 9 = 45$$

通りある。このそれぞれの場合について、 b の値は 0 から 9 までの 10 通りが考えられる
ため、 (a, b, c) の組み合わせは

$$45 \times 10 = 450$$

通りある。

[2] $a + c = 9$ のとき

$$101(a + c) + 20b \geq 1000$$

$$\Leftrightarrow 101 \cdot 9 + 20b \geq 1000$$

$$\Leftrightarrow 20b \geq 91$$

$$\therefore b = 5, 6, 7, 8, 9$$

となる。また、 $a + c = 9$ をみたす (a, c) の組み合わせは 8 通りあるから、 (a, b, c) の組み合
わせは

$$8 \times 5 = 40$$

通りある。

[3] $a + c \leq 8$ のとき

$$\begin{aligned} 101(a + c) + 20b &\leq 101 \cdot 8 + 20 \cdot 9 \\ &= 988 \end{aligned}$$

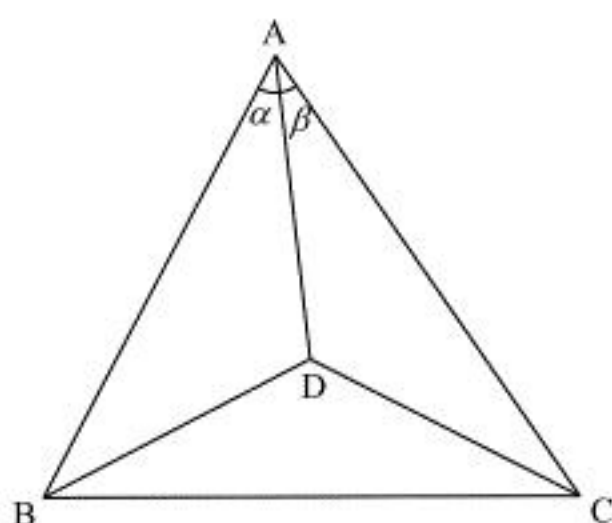
となり、 $n + n'$ が 4 桁になることはない。

以上 [1], [2], [3] より、求める個数は

$$450 + 40 = 490$$

個となる。

(答) 490 個



上図のように角 α , β を定めると、余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} \\ &= \frac{(\sqrt{34})^2 + 3^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot \sqrt{34} \cdot 3} \\ &= \frac{5}{\sqrt{34}}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \alpha < \pi$ より $\sin \alpha > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{34}}\end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \cdot AC} \\ &= \frac{3^2 + (2\sqrt{10})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{10}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \cos(\alpha + \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{85}}\end{aligned}$$

となるから、余弦定理より

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} \\ &= \sqrt{(\sqrt{34})^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2 \cdot \sqrt{34} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{6}{\sqrt{85}}} \\ &= \sqrt{26}\end{aligned}$$

となる。

実数 r, θ を用いて

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

とおく。ここで、 r, θ は

$$r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

をみたしているとする。すると $x^2 + y^2 = r^2$ に代入して

$$\begin{aligned} 19x^2 + 6xy + 11y^2 &= 19r^2 \cos^2 \theta + 6r^2 \cos \theta \sin \theta + 11r^2 \sin^2 \theta \\ &= 19r^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 6r^2 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} + 11r^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= r^2 (4 \cos 2\theta + 3 \sin 2\theta) + 15r^2 \\ &= 5r^2 \sin(2\theta + \alpha) + 15r^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 α は $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$ をみたし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である。このとき

$$\begin{aligned} 19x^2 + 6xy + 11y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 5r^2 \sin(2\theta + \alpha) + 15r^2 &= 1 \\ \therefore r^2 &= \frac{1}{5 \sin(2\theta + \alpha) + 15} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < \alpha \leq 2\theta + \alpha < 4\pi + \alpha < \frac{9}{2}\pi$$

であることに注意すると、 $x^2 + y^2$ 、つまり r^2 が最大となるのは $2\theta + \alpha = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$ のときで、

このとき

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

となる。また $2\theta + \alpha = \frac{3}{2}\pi$ のとき

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) \\ &= -\sin \alpha \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{4}{5}}{2} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

となる。いま

$$2\theta + \alpha = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}$$

であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{4}\pi$ だから $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

となる。次に、 $2\theta + \alpha = \frac{7}{2}\pi$ のときも同様にして

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

となる。いま

$$2\theta + \alpha = \frac{7}{2}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{7}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}$$

であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$ だから $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin \theta &= -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{10}}, \mp \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \quad (\text{複号同順})$$

となるため、 $r = \frac{1}{\sqrt{10}}$ より

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{10}, \mp \frac{3}{10} \right) \quad (\text{複号同順})$$

となる。 $x^2 + y^2$ 、つまり r^2 が最小となるのは $2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$ のときで、このとき

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \sin \alpha \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{4}{5}}{2} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

となる。いま

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ だから $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

となる。次に、 $2\theta + \alpha = \frac{5}{2}\pi$ のときも同様にして

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

となる。いま

$$2\theta + \alpha = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}$$

であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ だから $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sin \theta &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\pm \frac{3}{\sqrt{10}}, \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \quad (\text{複号同順})$$

となるから、 $r = \frac{1}{\sqrt{20}}$ より

$$(x, y) = \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{20}, \pm \frac{\sqrt{2}}{20} \right) \quad (\text{複号同順})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) = \left(\pm \frac{1}{10}, \mp \frac{3}{10} \right) \text{ のとき最大値 } \frac{1}{10} \\ (x, y) = \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{20}, \pm \frac{\sqrt{2}}{20} \right) \text{ のとき最小値 } \frac{1}{20} \end{array} \right. \quad (\text{いずれも複号同順})$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^2 \left| t^2 - 2xt + \frac{3}{4}x^2 \right| dt \\
 &= \int_0^2 \left| \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) \right| dt
 \end{aligned}$$

より、 x の値で場合分けを行う。

[1] $x < 0, 4 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^2 \left| \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) \right| dt \\
 &= \int_0^2 \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) dt \\
 &= \int_0^2 \left(t^2 - 2xt + \frac{3}{4}x^2 \right) dt \\
 &= \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 \leq x < \frac{4}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^2 \left| \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) \right| dt \\
 &= \int_0^{\frac{x}{2}} \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) dt + \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3}{2}x} \left\{ - \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) \right\} dt + \int_{\frac{3}{2}x}^2 \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) dt \\
 &= \int_0^{\frac{x}{2}} \left(t^2 - 2xt + \frac{3}{4}x^2 \right) dt + \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3}{2}x} \left\{ - \left(t^2 - 2xt + \frac{3}{4}x^2 \right) \right\} dt + \int_{\frac{3}{2}x}^2 \left(t^2 - 2xt + \frac{3}{4}x^2 \right) dt \\
 &= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x^2 + 3x - 4 \\
 &= (x-1)(x+4)
 \end{aligned}$$

となるから、増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...	$\frac{4}{3}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

[3] $\frac{4}{3} \leq x < 4$ のとき

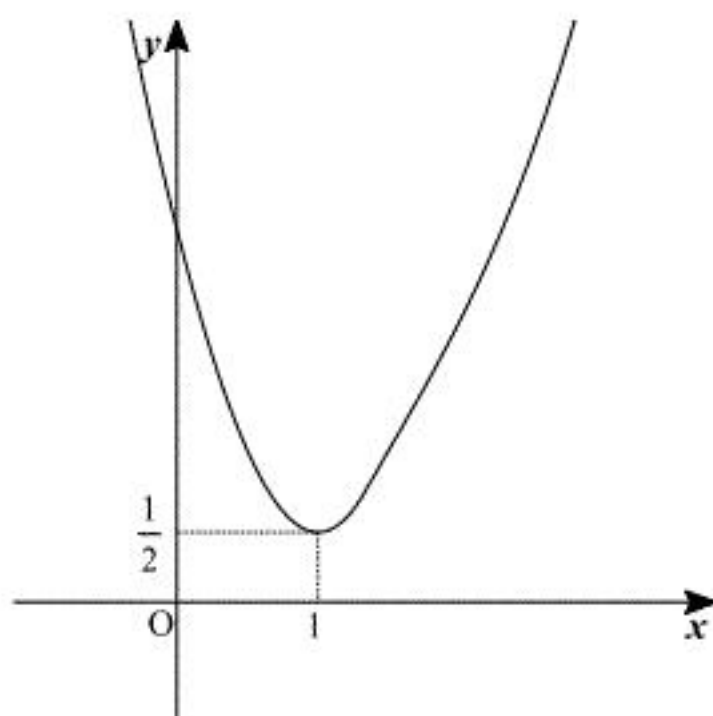
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^2 \left| \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) \right| dt \\
 &= \int_0^{\frac{x}{2}} \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) dt + \int_{\frac{x}{2}}^2 \left\{ - \left(t - \frac{x}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2}x \right) \right\} dt \\
 &= \int_0^{\frac{x}{2}} \left(t^2 - 2xt + \frac{3}{4}x^2 \right) dt + \int_{\frac{x}{2}}^2 \left\{ - \left(t^2 - 2xt + \frac{3}{4}x^2 \right) \right\} dt \\
 &= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x^2 - 3x + 4 \\
 &= \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ は単調増加となる。

以上[1], [2], [3]より、 $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



上図より、 $x=1$ のとき $f(x)$ は最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

(答) $x=1$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$