**1**

自然数$n$に対して$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$とおき，$n\geqq 2$のとき，等式

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}S_k=2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}S_n \quad ・・・①$$

が成立することを，数学的帰納法により示す。$n=2$のとき

$$(①の左辺)=\frac{1}{1\cdot 2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

$$(①の右辺)=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

である。よって，①は成立する。$n=m$のときの①の成立を仮定する。すなわち，

$$\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k(k-1)}S_k=2-\frac{1}{m}-\frac{1}{m}S_m \quad ・・・②$$

の成立を仮定する。このとき，$n=m+1$において

$$(①の左辺)=\sum_{k=2}^{m+1}\frac{1}{k(k-1)}S_k=\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k(k-1)}S_k+\frac{1}{m(m+1)}S_{m+1}$$

$$=2-\frac{1}{m}-\frac{1}{m}S_m+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)S_{m+1}\ (\because ②)$$

$$=2-\frac{1}{m}-\frac{1}{m}S_m+\frac{1}{m}\left(S_m+\frac{1}{m+1}\right)-\frac{1}{m+1}S_{m+1}$$

$$=2-\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)-\frac{1}{m+1}S_{m+1}$$

$$=2-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+1}S_{m+1}$$

となる。これは$n=m+1$のときの①の右辺に等しい。したがって，$n=m$において①の成立を仮定したとき，$n=m+1$においても①は成立する。以上より，自然数$n$ ($n\geqq 2$)について①は成立する。

(証明終)

# 2

(1)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}x^3-x^2$$

とおくと

$$f'(x)=\sqrt{3}x^2-2x$$

である。

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=0,\ \frac{2}{\sqrt{3}}$$

また

$$f''(x)=2\sqrt{3}t-2$$

であり

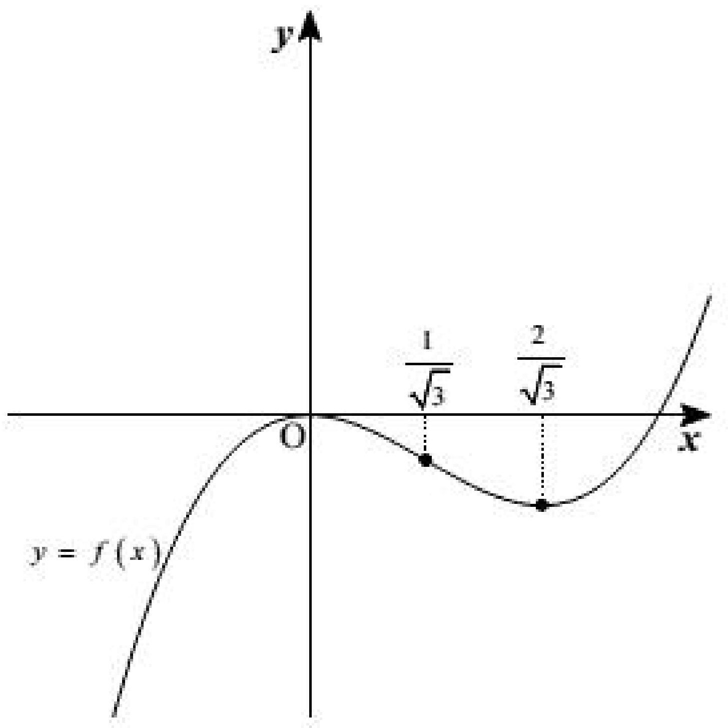
$$f''(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

より，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

| $x$ | | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | | − | 0 | + |
| $f''(x)$ | − | | − | 0 | + | | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |

よって，$y=f(x)$ の概形は下のようになる。




ここで，点 A における曲線 $C: y=f(x)$ の接線の傾きを $m\left(=\sqrt{3}t^2-2t\right)$ とすると

(ⅰ)かつ(ⅱ) $\Leftrightarrow$ 正三角形ABCに対し，辺 AB および辺 AC が領域 $R$ に含まれ，かつ，辺 BC が $x$ 軸に平行である。

$\Leftrightarrow$ $x$ 軸に対し，傾き $\tan 60°$ である線分 AB と傾き $\tan(-60°)$ である線分 AC が領域 $R$ 内に引ける，または傾き $\tan 60°$ である線分 AC と傾き $\tan(-60°)$ である線分 AB が領域 $R$ 内に引ける。

$\Leftrightarrow$ $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ であり，$t\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $-\sqrt{3}\leqq m\leqq\sqrt{3}$

である。

$$\begin{aligned}m-\left(-\sqrt{3}\right)&=\sqrt{3}t^2-2t+\sqrt{3}\\&=\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\\&>0\end{aligned}$$

であるから，$-\sqrt{3}<m$ は常に成立する。また

$$\begin{aligned}m-\sqrt{3}&=\sqrt{3}t^2-2t-m\\&=\left(\sqrt{3}t+1\right)\left(t-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

であるから，以上より，(ⅰ)かつ(ⅱ)を満たす $t$ の範囲は

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t\leqq\sqrt{3}$$

である。

(答) $-\frac{1}{\sqrt{3}}<t\leqq\sqrt{3}$

(2)

対称性より，三角形 ABC の頂点が，左回りに A, B, C の順番であるとしてもよい。グラフの概形と(1)の結果より，$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t\leqq\sqrt{3}$ において，AC は任意の長さがとれる。したがって，三角形 ABC の面積の最大値は辺 AB の長さの最大値による。辺 AB が最大値をとるときは，点 B が曲線 $C$ 上に存在するときである。$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t\leqq\sqrt{3}$ のとき，$f'(x)\leqq\sqrt{3}$ であるので，この範囲において点 A の $x$ 座標が大きくなるほど点 B の $x$ 座標は減少し，辺 AB の長さは大きくなる。したがって $t=\sqrt{3}$ のとき，辺 AB の長さは最大になる。以上より，$t=\sqrt{3}$ のとき直線 AB の方程式は $y=\sqrt{3}x-3$ であり，直線 AB と曲線 $C$ の交点を考えて

$$\sqrt{3}x-3=\frac{1}{\sqrt{3}}x^3-x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

より，$\mathrm{B}\left(-\sqrt{3},-6\right)$ となる。以上より求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left\{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right\}^2+(-6)^2\right]\sin 60°=12\sqrt{3}$$

である。

(答) $12\sqrt{3}$

**3**

$$a\cos^2 x + 4\sin x - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(1-\sin^2 x\right) + 4\sin x - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\sin^2 x - 4\sin x + 2a - 2 = 0$$

となる。ここで，$\sin x = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であるから，$at^2 - 4t + 2a - 2 = 0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で解を持つような $a$ の範囲を求めればよい。このとき，与式は

$$at^2 - 4t + 2a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2(2t+1)}{t^2+2}$$

と変形できる。いま，$f(t) = \dfrac{2(2t+1)}{t^2+2}$ とおくと

$$f'(t) = \frac{2\left\{2\left(t^2+2\right) - (2t+1)\cdot 2t\right\}}{\left(t^2+2\right)^2}$$

$$= -\frac{4(t+2)(t-1)}{\left(t^2+2\right)^2}$$

となるので，関数 $f(t)$ の増減表は

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | |

となる。ここで，$f(-1) = -\dfrac{2}{3}$, $f(1) = 2$ であるので，求める $a$ の範囲は $-\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq 2$ となる。

(答) $-\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq 2$

**4**

円板の外周の方程式は

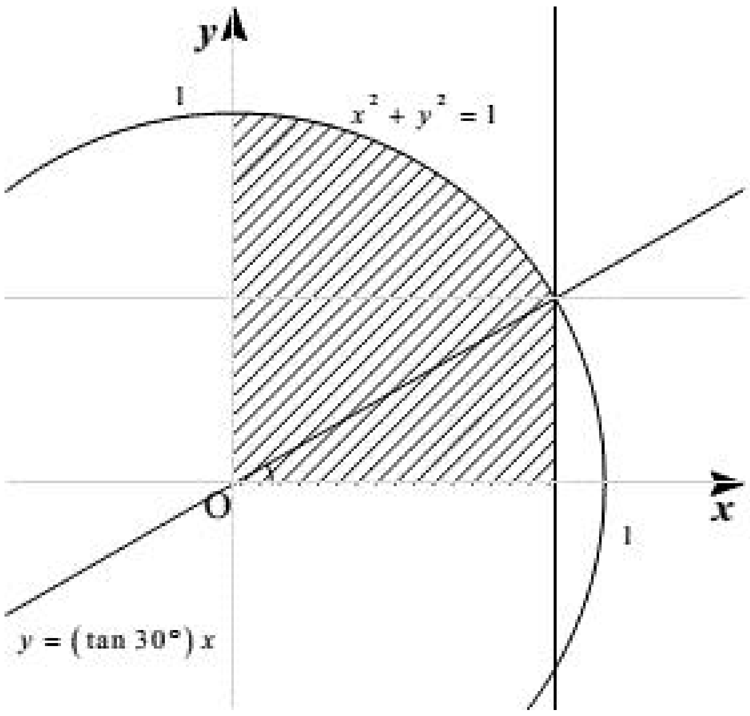
$$x^2+(y-3)^2=1 \qquad \cdots ①$$

である。また，①と $y=\frac{5}{2}$ との交点の $x$ 座標は $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。① $\Leftrightarrow$ $y=3\pm\sqrt{1-x^2}$ であることと，円板が $y$ 軸に関して対象であることに注意すると，求める体積 $V$ は

$$V=2\left[\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}dx+\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left\{\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right\}dx\right]$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{15}{4}-x^2+6\sqrt{1-x^2}\right)dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}12\sqrt{1-x^2}\,dx\right\}$$

で求められる。ここで $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ は下図の斜線部の面積に等しい。




よって

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

である。また，$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ も図から同様に考えて

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=1\cdot1\cdot\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

である。以上より

$$V=2\pi\left\{\left[\frac{15}{4}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right\}+2\pi^2-3\sqrt{3}\pi$$

$$=4\pi^2+2\sqrt{3}\pi$$

である。

(答) $V=4\pi^2+2\sqrt{3}\pi$