

平成 19 年 度 数 学 (04)



試験開始の合図があるまでに、次の注意をよく読んで、間違いないようにしなさい。

1. 試験開始の合図があるまで冊子を開いてはいけません。
2. この冊子には問題 2 ページ，解答用紙(その I)・(その II) 2 枚と計算用紙がセットになっています。
3. 試験開始の合図がされたら，問題のページ数を確認し，解答用紙(その I)・(その II)・計算用紙をミシン目で折ってから冊子よりていねいに切り離し，すべての用紙に受験番号を記入しなさい。
4. 問題・解答用紙に落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所がある場合には申し出なさい。
5. 解答の記入は黒鉛筆に限ります。
6. 文字ははっきり書きなさい。解答の文字が読みにくい場合，点を与えないことがあります。
7. 計算・下書きには計算用紙を用いなさい。
8. 解答用紙の点数欄には何も記入してはいけません。
9. 試験中，使用していない解答用紙は机の上に裏返しにしておきなさい。
10. 試験終了の合図がされたら，解答用紙(その I)・(その II)のみ提出しなさい。計算用紙は提出の必要はありません。

問題は次のページより始まります。

1自然数 n に対して

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

とおく。 $n \geq 2$ のとき、等式

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} S_k = 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} S_n$$

が成り立つことを示せ。

(30 点)

2

不等式 $y \leq \frac{1}{\sqrt{3}} x^3 - x^2$ の表す平面上の領域を R とし、曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x^3 - x^2$ 上に点 $A(t, \frac{1}{\sqrt{3}} t^3 - t^2)$ をとる。

(1) 次の条件 (i), (ii) を同時に満たす点 B, C が存在するような t の範囲を求めよ。

(i) 三角形 ABC は正三角形であり、 R に含まれる。

(ii) 辺 BC は x 軸に平行である。

(2) t が (1) の範囲を動くとき、(1) の条件を満たす正三角形 ABC の面積の最大値を求めよ。

(40 点)

3 x の方程式

$$a \cos^2 x + 4 \sin x - 3a + 2 = 0$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(40 点)

4

点 $(0, 3)$ を中心とする半径 1 の円板の $y \geq \frac{5}{2}$ にある部分を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

(40 点)