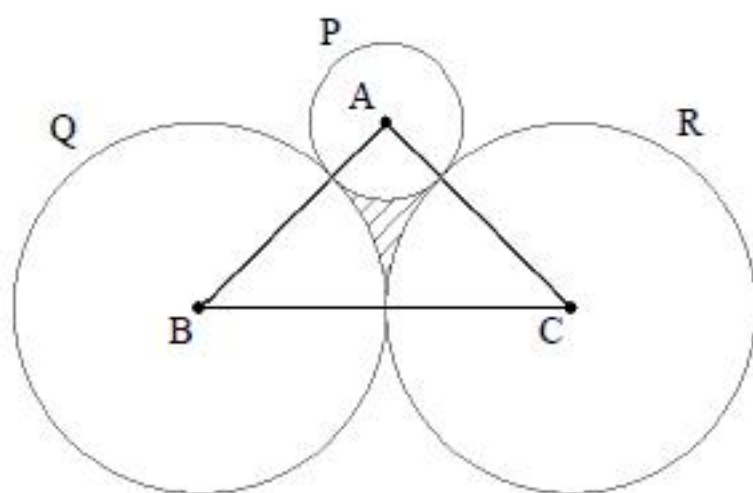


1

半径 $\sqrt{2}-1, 1, 1$ の円 P, Q, R の中心をそれぞれ A, B, C とする。



$AB = AC = \sqrt{2}$, $BC = 2$ だから, $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形である。 $\triangle ABC$ の面積を S_1 , $\triangle ABC$ が円 P, Q, R から切り取る扇形の面積をそれぞれ S_2, S_3, S_4 とすると,

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 = 1$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \pi(\sqrt{2}-1)^2 \times \frac{90^\circ}{360^\circ} \\ &= \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \pi \times \frac{45^\circ}{360^\circ} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

と求めることができ, $S_3 = S_4$ に注意すると, 斜線部の面積は

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 - 2S_3 &= 1 - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \pi - \frac{\pi}{4} \\ &= 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \pi$$

(1)

$a-b=1$ となるときの確率を求める。これは、1回目に1とかかれた球以外のどれかを取り出し、2回目に1回目より1少ない数がかかれた球を取り出すときだから、求める確率は、

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

となる。

(答) $\frac{1}{n}$

(2)

$a < b$ となるときの確率を求める。これは、 $a=k$ ($1 \leq k \leq n-1$) のとき、 $k+1 \leq b \leq n$ を満たすように球を取り出すときであり、 $a=k$ のとき $a < b$ となる確率は、

$$\frac{1}{n} \times \frac{n-k}{n-1} = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

であるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n(n-1)} \right) &= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ n(n-1) - \frac{1}{2}n(n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

得点が m となるときの確率を求める。これは、 $m+1 \leq a \leq n$ かつ $a-b=1$ となるときであり、 a を決めれば b もただ一つに定まることに注意すると、求める確率は、

$$\frac{n-m}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{n-m}{n(n-1)}$$

と計算できるから、得点の期待値は、

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \frac{n-m}{n(n-1)} \times m \right\} &= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ n \times \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{6}(n+1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}(n+1)$

$f(x)$ は 3 次式なので、 $f(x)$ を x^2+x+1 , x^2+1 で割ったときの商は 1 次以下の多項式となる。
それぞれの商を $ax+b$, $cx+d$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)(ax+b)+x+1 \\ &= ax^3+(a+b)x^2+(a+b+1)x+b+1 \\ f(x) &= (x^2+1)(cx+d)+x-1 \\ &= cx^3+dx^2+(c+1)x+d-1 \end{aligned}$$

と書き表せる。2 つの式を係数比較すると、

$$\begin{cases} a=c \\ a+b=d \\ a+b+1=c+1 \\ b+1=d-1 \end{cases}$$

という連立方程式が得られるから、これを解いて、 $(a, b, c, d) = (2, 0, 2, 2)$ とわかるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)(2x)+x+1 \\ &= 2x^3+2x^2+3x+1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

4

(1)

$f(x) = x^2(1-x)$ より $f'(x) = -x(3x-2)$ となるから、増減表は以下の通りである。

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって $f(x)$ は $x = \frac{2}{3}$ で極大となる。

(答) $x = \frac{2}{3}$

(2)

まず、 $f(x)$ と $g(x)$ の交点の x 座標を求める。

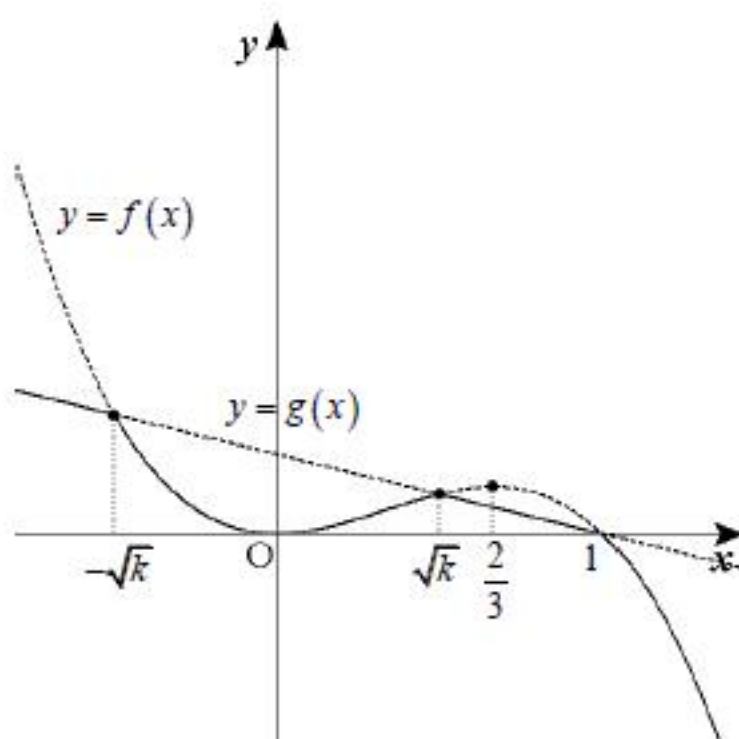
$$x^2(1-x) = k(1-x)$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(x^2 - k) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \pm\sqrt{k} (\because k > 0)$$

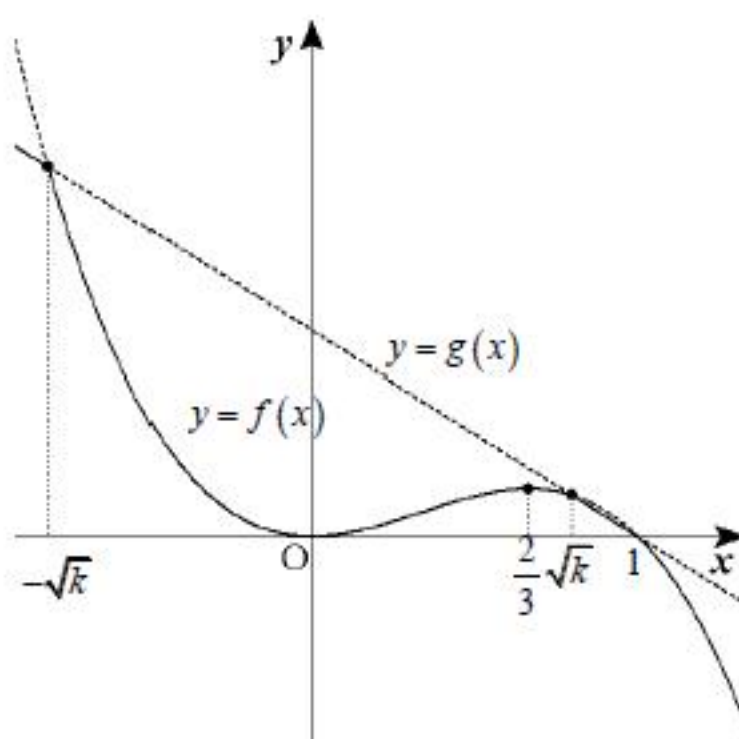
$\sqrt{k}$ と $\frac{2}{3}$ の大小で場合分けして、それぞれの場合の $y = h(x)$ を図示する。

[1] $\sqrt{k} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 < k \leq \frac{4}{9}$ のとき、



上図より、 $x = \sqrt{k}$ で極大値をとる。

[2] $\sqrt{k} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow k > \frac{4}{9}$ のとき、



上図より、 $x = \frac{2}{3}$ で極大値をとる。

したがって[1], [2]より、 $h(x)$ は、 $0 < k \leq \frac{4}{9}$ のとき $x = \sqrt{k}$ 、 $k > \frac{4}{9}$ のとき $x = \frac{2}{3}$ で、それぞれ極大値をとる。

(答) $0 < k \leq \frac{4}{9}$ のとき $x = \sqrt{k}$ 、 $k > \frac{4}{9}$ のとき $x = \frac{2}{3}$