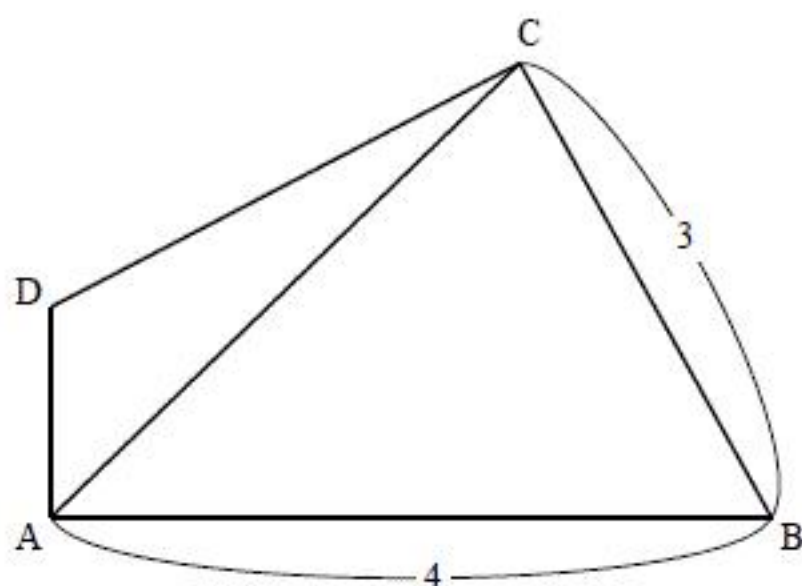


題意の四角形 ABCD を図示すると、以下のようになる。



まず、 $\triangle ABC$ において、余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + BA^2 - 2BC \cdot BA \cdot \cos 60^\circ \\ &= 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

となるから、 $AC = \sqrt{13}$ となる。ここで、 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ より、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

となるから、この四角形は円に内接する。また、 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ だから、BDはこの外接円の直径となっている。したがって、この外接円の半径を R とすると、正弦定理より、

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R$$

となる。この式から、BDの長さは、

$$\begin{aligned} BD &= 2R \\ &= \frac{AC}{\sin \angle B} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{39} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AC = \sqrt{13}, \quad BD = \frac{2}{3}\sqrt{39}$$

(1)

a, b, c の値として取り得る値の組は,

(1, 2, 6)

(1, 3, 5)

(1, 4, 4)

(2, 2, 5)

(2, 3, 4)

(3, 3, 3)

となる。ここで、サイコロは大・中・小と区別があるから、各組の場合の数を考える。

(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4) の組のときは、それぞれ $3! = 6$ 通りである。次に、(1, 4, 4), (2, 2, 5) の組のときは、それぞれ 3 通りである。(3, 3, 3) のときは 1 通りである。

全事象は $6^3 = 216$ 通りであるから、求める確率は、

$$\frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1}{216} = \frac{25}{216}$$

となる。

(答) $\frac{25}{216}$

(2)

目の合計を S とすると、 S の範囲は、

$$3 \leq S \leq 18$$

となる。この範囲の数で 6 で割って 3 余るものは、 $S = 3, 9, 15$ である。以下、各々の場合を考える。

[1] $S = 3$ のとき

a, b, c の値として取り得る値の組は、

(1, 1, 1)

のみである。したがって、この場合の確率は、

$$\frac{1}{216}$$

となる。

[2] $S = 9$ のとき

(1)の結果より、この場合の確率は、

$$\frac{25}{216}$$

である。

[3] $S = 15$ のとき

a, b, c の値として取り得る値の組は、

(3, 6, 6)

(4, 5, 6)

(5, 5, 5)

である。(1)と同様にサイコロの区別を考えると、(3, 6, 6)のときは 3 通り、(4, 5, 6)のときは $3! = 6$ 通り、(5, 5, 5)のときは 1 通りとなる。したがって、この場合の確率は、

$$\frac{10}{216}$$

となる。

以上、[1], [2], [3]より、求める確率は

$$\frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}$

(1)

$3^x = t$ とおく。 $x \neq 0$ であるから、 $t \neq 1$ となる。したがって、与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{3^x + 1}{3^x - 1} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{t + 1}{t - 1} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2(t + 1) &= 3(t - 1) \\ \therefore t &= 5\end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$3^x = 5$$

となる。両辺の底が 3 の対数をとると、

$$\begin{aligned}3^x &= 5 \\ \Leftrightarrow \log_3 3^x &= \log_3 5 \\ \Leftrightarrow x &= \log_3 5\end{aligned}$$

となる。

(答) $x = \log_3 5$

(2)

(1)と同様に、 $3^x = t$ とおく。与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}f(2x) - f(x) &= -\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3^{2x} + 1}{3^{2x} - 1} - \frac{3^x + 1}{3^x - 1} &= -\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} - \frac{t + 1}{t - 1} &= -\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{(t^2 + 1) - (t + 1)^2}{t^2 - 1} &= -\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{-2t}{t^2 - 1} &= -\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 3t &= 2(t^2 - 1) \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t + 1)(t - 2) &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{1}{2}, 2\end{aligned}$$

ここで、 $t = 3^x$ であるから、 $t > 0$ である。したがって、 $t = 2$ が適する。よって、

$$3^x = 2$$

となる。両辺の底が 3 の対数をとると、

$$\begin{aligned}3^x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \log_3 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $x = \log_3 2$

絶対値を外すために、 x の値について場合分けして考える。

[1] $x \leq 1$ のとき

$1 \leq t \leq 2$ の範囲では、

$$|t^2 - xt| = t^2 - xt$$

となる。したがって、 $f(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^2 (t^2 - xt) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{x}{2} t^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} - 2x - \frac{1}{3} + \frac{x}{2} \\ &= \frac{7}{3} - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

となる。

[2] $1 < x < 2$ のとき

$1 \leq t \leq x$ の範囲では、

$$|t^2 - xt| = -t^2 + xt$$

となる。 $x < t \leq 2$ の範囲では、

$$|t^2 - xt| = t^2 - xt$$

となる。したがって、 $f(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^2 |t^2 - xt| dt \\ &= \int_1^x (-t^2 + xt) dt + \int_x^2 (t^2 - xt) dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{x}{2} t^2 \right]_1^x + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{x}{2} t^2 \right]_x^2 \\ &= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{8}{3} - 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x + 3 \end{aligned}$$

となる。

[3] $2 \leq x$ のとき

$1 \leq t \leq 2$ の範囲では、

$$|t^2 - xt| = -t^2 + xt$$

となる。したがって、 $f(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^2 (-t^2 + xt) dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{x}{2} t^2 \right]_1^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 2x + \frac{1}{3} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{3}{2}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となる。

以上より、各場合の最小値を考える。[1]の式は単調減少であるから、 $x=1$ のとき最小値を取り、その値は $\frac{5}{6}$ である。一方、[3]の式は単調増加であるから、 $x=2$ のとき最小値を取り、その値は $\frac{2}{3}$ である。

次に、[2]の場合を考える。このとき、 $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x + 3$ であるから、 x で微分すると、

$$f'(x) = x^2 - \frac{5}{2}$$

となる。 $1 < x < 2$ の範囲では、 $f'(x) = 0$ は、 $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ を解に持つ。したがって、増減表は以下のようになる。

x	1	...	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	最小値	$\nearrow$	

したがって、この範囲での最小値を与える x は $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ であり、このときの値は、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^3 - \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} + 3 \\ &= 3 - \frac{5}{6}\sqrt{10} \end{aligned}$$

となる。これは、 $\frac{2}{3}$ より小さい。したがって、最小値は $3 - \frac{5}{6}\sqrt{10}$ となり、これを与える x は $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ である。

(答) 最小値 $3 - \frac{5}{6}\sqrt{10}$ $\left(x = \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$