

(前半・不等式が成り立つことの証明)

$$\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \geq 0$$

を示すために、この不等式の両辺に $(1+|a|)(1+|b|)(1+|a+b|) (>0)$ をかけた

$$|a|(1+|b|)(1+|a+b|) + |b|(1+|a|)(1+|a+b|) - |a+b|(1+|a|)(1+|b|) \geq 0 \cdots \textcircled{1}$$

を示す。①において

(左辺)

$$\begin{aligned} &= |a| + |a||b| + |a||a+b| + |a||b||a+b| \\ &\quad + |b| + |a||b| + |b||a+b| + |a||b||a+b| \\ &\quad - |a+b| - |a||a+b| - |b||a+b| - |a||b||a+b| \\ &= |a| + |b| - |a+b| + |a||b|(2+|a+b|) \end{aligned}$$

$$\geq |a||b|(2+|a+b|) \quad (\because |a+b| \leq |a|+|b|) \cdots \textcircled{2}$$

$$\geq 0 \quad (\because |a| \geq 0, |b| \geq 0, 2+|a+b| > 0) \cdots \textcircled{3}$$

より、与えられた不等式が成り立つことが示された。

(証明終)

(後半・等号が成り立つための条件)

不等式①の等号が成立するには、不等式②、③がともに等号が成立することが条件となる。まず、③より $a=0$ または $b=0$ でなければならない。このとき、

$$|a+b| = |a| + |b|$$

であるから、②の等号も成立する。以上より、求める条件は

$$a=0 \text{ または } b=0$$

となる。

(答) $a=0$ または $b=0$

(a, b) の組の総数は $6^2 = 36$ 通りであり、各組が与えられる事象は同様に確からしい。

(1)

$$ab - 2a - b > 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-2) - (b-2) - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-2) > 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。不等式①を満たす (a, b) の組の総数を求める。

[1] $a=1$ のとき

①を満たす b は存在せず、不適である。

[2] $a=2$ のとき

①より $b > 4$ であるから、 $b=5, 6$ の 2 通りである。

[3] $a=3$ のとき

①より $b > 3$ であるから、 $b=4, 5, 6$ の 3 通りである。

[4] $a=4$ のとき

①より $b > \frac{8}{3}$ であるから、 $b=3, 4, 5, 6$ の 4 通りである。

[5] $a=5, 6$ のとき

$a=4$ の場合と同様に、 $b=3, 4, 5, 6$ の 4 通りである。

以上より、①を満たす (a, b) の組の総数は

$$2+3+4+4+4=17$$

であるから、求める確率は $\frac{17}{36}$ である。

(答) $\frac{17}{36}$

(2)

$$2a+b=2(a+1)+b-2$$

なので、

$$a+1 \text{ が } 2a+b \text{ の約数}$$

$$\Leftrightarrow a+1 \text{ が } b-2 \text{ の約数}$$

である。 $2 \leq a+1 \leq 7$ より、 $b-2$ の約数で 2 以上 7 以下のものの数を数えればよい。

[1] $b=1$ のとき

$b-2=-1$ より、条件を満たす a は存在せず、不適である。

[2] $b=2$ のとき

$b-2=0$ より、任意の a で条件は満たされる。すなわち、 $a=1, 2, \dots, 6$ の 6 通りである。

[3] $b=3$ のとき

$b-2=1$ より、条件を満たす a は存在せず、不適である。

[4] $b=4$ のとき

$b-2=2$ の 2 以上 7 以下の約数は 2 である。すなわち、 $a=1$ の 1 通りである。

[5] $b=5$ のとき

$b-2=3$ の 2 以上 7 以下の約数は 3 である。すなわち、 $a=2$ の 1 通りである。

[6] $b=6$ のとき

$b-2=4$ の 2 以上 7 以下の約数は 2, 4 である。すなわち、 $a=1, 3$ の 2 通りである。

以上より、条件を満たす (a, b) の組の総数は

$$6+1+1+2=10$$

であるから、求める確率は

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

となる。

(答) $\frac{5}{18}$

3

$$a_n = 5^{n-1},$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$$

であるから,

$$\frac{1}{4}(5^n - 1) \geq 10^{100}$$

$$\Leftrightarrow 5^n \geq 4 \cdot 10^{100} + 1$$

$$\Leftrightarrow 5^n > 4 \cdot 10^{100} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす最小の自然数 n を求めればよい。①において、両辺の常用対数をとると

$$n(1 - \log_{10} 2) > 100 + 2 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{100 + 2 \log_{10} 2}{1 - \log_{10} 2}$$

$$= \frac{100 + 0.6020}{1 - 0.3010}$$

$$= \frac{100602}{699}$$

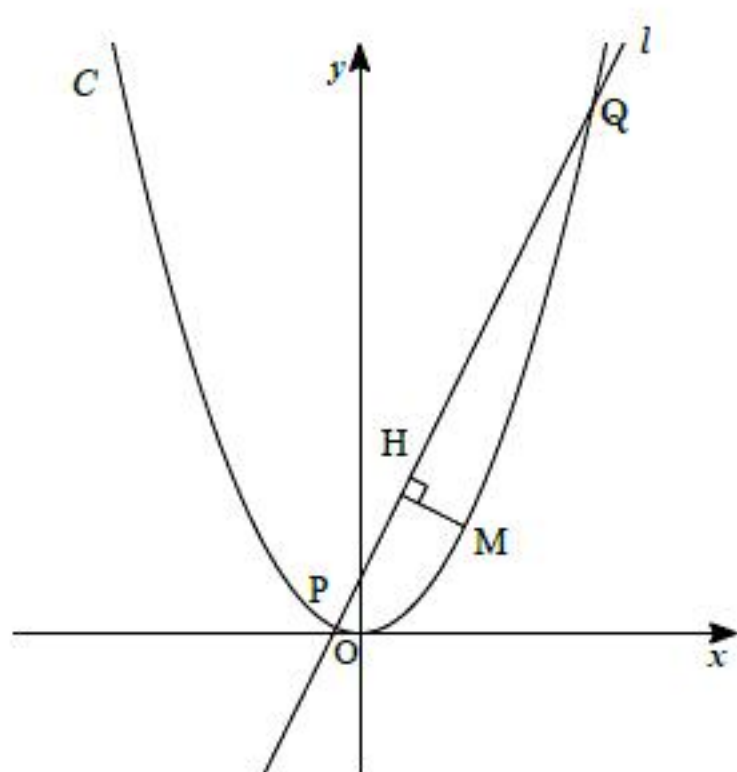
$$= 143.92 \cdots$$

となる。よって、求める n は $n = 144$ となる。

(答) $n = 144$

4

(1)



$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} &= 2x+1 \\ \Leftrightarrow x^2-4x-2 &= 0 \\ \therefore x &= 2 \pm \sqrt{6}\end{aligned}$$

より、P、Q の x 座標はそれぞれ $2-\sqrt{6}$ 、 $2+\sqrt{6}$ である。したがって、

$$2-\sqrt{6} < t < 2+\sqrt{6}$$

である。直線 MH は l に直交するので、傾きは $-\frac{1}{2}$ である。よって、実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \overline{OM} + \overline{MH} \\ &= \left(t, \frac{1}{2}t^2\right) + \alpha\left(1, -\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(t+\alpha, \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\alpha\right)\end{aligned}$$

とおける。一方、H は l 上の点であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\alpha &= 2(t+\alpha)+1 \\ \therefore \alpha &= \frac{1}{5}(t^2-4t-2)\end{aligned}$$

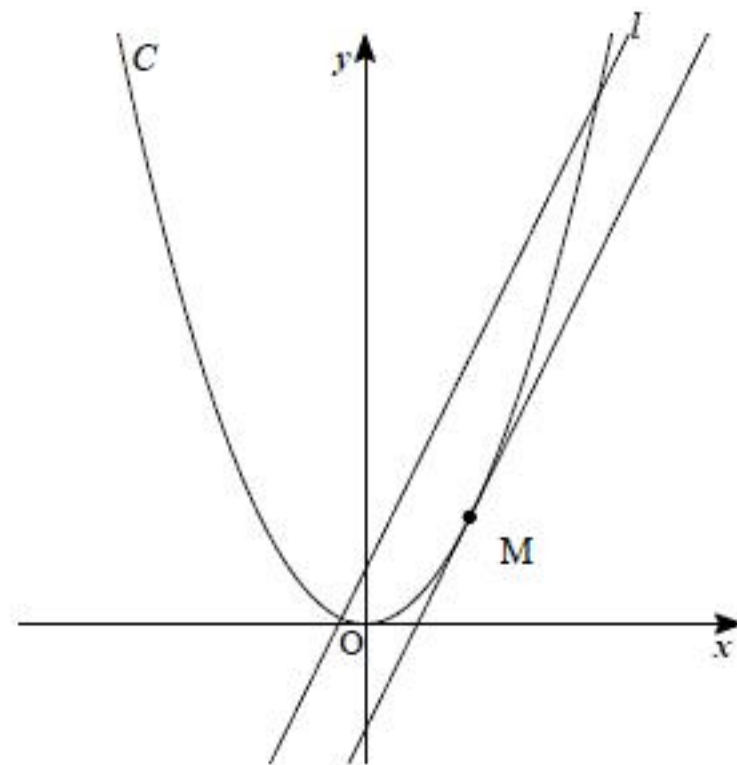
を得る。したがって、

$$H\left(\frac{1}{5}(t^2+t-2), \frac{1}{5}(2t^2+2t+1)\right) \quad (2-\sqrt{6} < t < 2+\sqrt{6})$$

である。

$$(\text{答}) \quad H\left(\frac{1}{5}(t^2+t-2), \frac{1}{5}(2t^2+2t+1)\right)$$

(2)



l と平行な直線上の任意の点と l との距離が一定であることから、上図のように l と平行な C

の接線の接点が求める M である。 $y = \frac{1}{2}x^2$ を微分すると $y' = x$ であることと、 l の傾きは 2

であることより、

$$M(2, 2)$$

となる。また、このとき、 $t = 2$ であるから(1)より

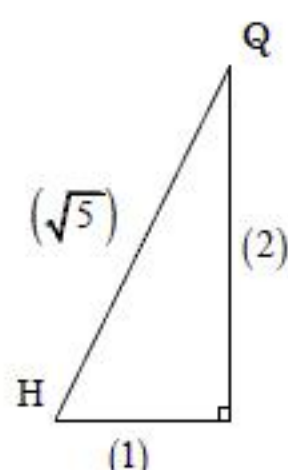
$$H\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

となる。

求める面積を S 、 $\triangle HMQ$ の面積を S_1 、直線 MQ と C で囲まれた部分の面積を S_2 とおくと、

$$S = S_1 + S_2$$

である。まず、 S_1 を求める。



Q の x 座標が $2+\sqrt{6}$ 、 l の傾きが 2 であることから

$$\begin{aligned}HQ &= \sqrt{5} \left\{ (2+\sqrt{6}) - \frac{4}{5} \right\} \\ &= \sqrt{5} \left(\frac{6}{5} + \sqrt{6} \right)\end{aligned}$$

である。また、MH の長さは M と l の距離に等しく、

$$\begin{aligned}MH &= \frac{|2 \cdot 2 - 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \cdot MQ \cdot MH \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \left(\frac{6}{5} + \sqrt{6} \right) \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{9}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である。次に、 S_2 を求める。直線 MQ の方程式を $y = f(x)$ とおけば、

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_2^{2+\sqrt{6}} \left\{ f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_2^{2+\sqrt{6}} (x-2) \{ x - (2+\sqrt{6}) \} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot \{ (2+\sqrt{6}) - 2 \}^3 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}S &= \frac{9}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \\ &= \frac{9}{5} + 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{5} + 2\sqrt{6}$$