

放物線 $y = x^2 + bx + c$ が x 軸と二つの交点を持つとき、方程式 $x^2 + bx + c = 0$ が異なる二解を持つ。つまりこの方程式の判別式が 0 より大きいので

$$b^2 - 4c > 0$$

となる。この条件のもとで、放物線 C と x 軸との交点の x 座標は方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の二解

であり、それらを $x = \alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおく。ここで $P(t, 0) \left(t > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right)$ について

$$\begin{aligned} AP \cdot BP &= (t - \alpha)(t - \beta) \\ &= t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta \end{aligned}$$

である。解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -b \\ \alpha\beta = c \end{cases}$$

であるから

$$AP \cdot BP = t^2 + bt + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。次に点 P を通り、放物線 C と $\alpha < x < \beta$ の部分で接する接線を求める。 $y = x^2 + bx + c$ より

$$y' = 2x + b$$

となる。放物線 C 上の点 $(s, s^2 + bs + c)$ を通る接線は

$$\begin{aligned} y &= (2s + b)(x - s) + s^2 + bs + c \\ &= (2s + b)x - s^2 + c \end{aligned}$$

となり、これが点 P を通るとき

$$\begin{aligned} 0 &= (2s + b)t - s^2 + c \\ \Leftrightarrow s^2 - 2ts - bt - c &= 0 \\ \therefore s &= t \pm \sqrt{t^2 + bt + c} \end{aligned}$$

となる。よって接点から x 軸に垂線を下ろし、その足を H とすると

$$\begin{aligned} HP^2 &= \left| t \pm \sqrt{t^2 + bt + c} - t \right|^2 \\ &= \left(\sqrt{t^2 + bt + c} \right)^2 \\ &= t^2 + bt + c \end{aligned}$$

となる。 R は二つの H のうちいずれか一方であるから

$$RP^2 = t^2 + bt + c$$

となる。これと①式から

$$RP^2 = AP \cdot BP$$

が示された。

与式より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG} &= \vec{0} \\ \therefore \sum_{k=1}^4 \overrightarrow{GA_k} &= \vec{0}\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA_k}|^2 - |\overrightarrow{GA_k}|^2 &= (\overrightarrow{PA_k} - \overrightarrow{GA_k}) \cdot (\overrightarrow{PA_k} + \overrightarrow{GA_k}) \\ &= \overrightarrow{PG} \cdot (\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{GA_k}) \\ &= |\overrightarrow{PG}|^2 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{GA_k} \\ &= 1 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{GA_k}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 |\overrightarrow{PA_k}|^2 - \sum_{k=1}^4 |\overrightarrow{GA_k}|^2 &= \sum_{k=1}^4 (|\overrightarrow{PA_k}|^2 - |\overrightarrow{GA_k}|^2) \\ &= \sum_{k=1}^4 (1 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{GA_k}) \\ &= 4 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \sum_{k=1}^4 (\overrightarrow{GA_k}) \\ &= 4 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \vec{0} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

点Pの座標を (x_0, y_0) とおく。点Pを点Aに近づける極限を考えればよいので、 $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ としてよい。Pにおける接線の方程式は

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

であるから、その傾きは $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ となる。よって法線の傾きは $\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$ となるので、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0) + y_0 \\ &= \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} x + \frac{b^2 - a^2}{b^2} y_0 \end{aligned}$$

となる。よって z の値は

$$z = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_0$$

となるので

$$\lim_{x_0 \rightarrow a} z = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

となる。よってPがC上を動いてAに限りなく近づくときの z の極限值は

$$\frac{a^2 - b^2}{a}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2 - b^2}{a}$$

(1)

C が点 $P(1, 1)$ を通るので

$$1 = e^{a+b} \\ \Leftrightarrow a+b=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また,

$$y' = 2bxe^{a+bx^2}$$

であるから, P での接線の傾きが -2 であるとき

$$-2 = 2be^{a+b} \\ \Leftrightarrow b = -1 (\because \textcircled{1}) \\ \therefore (a, b) = (1, -1)$$

となる。

(答) $(a, b) = (1, -1)$

(2)

$y = e^{1-x^2}$ について

$$y' = -2xe^{1-x^2}$$

であるから, $x > 0$ において $y = e^{1-x^2}$ は単調減少である。また, $y = e^{1-x^2}$ と y 軸の交点は $(0, e)$

である。 $y = x^2$ は $x > 0$ において単調増加であり, 点 $(1, 1)$ を通る。よってこれら二つの曲線は

$x > 0$ で点 $(1, 1)$ においてのみ交わる。ここで $y = e^{1-x^2}$ について

$$y = e^{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \log y = 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 = 1 - \log y$$

となるので, 求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 x^2 dy + \pi \int_1^e x^2 dy &= \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^e (1 - \log y) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 + \pi [y - y \log y]_1^e + \pi \int_1^e dy \\ &= \frac{1}{2} \pi - \pi + \pi [y]_1^e \\ &= -\frac{1}{2} \pi + e\pi - \pi \\ &= \left(e - \frac{3}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(e - \frac{3}{2} \right) \pi$