

平成 20 年 度 数 学 (04)

試験開始の合図があるまでに、次の注意をよく読んで、間違いないようにしなさい。

1. 試験開始の合図があるまで冊子を開いてはいけません。
2. この冊子には問題 2 ページ、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ) 2 枚と計算用紙がセットになっています。
3. 試験開始の合図がされたら、問題のページ数を確認し、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ)・計算用紙をミシン目で折ってから冊子よりていねいに切り離し、すべての用紙に受験番号を記入しなさい。
4. 問題・解答用紙に落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所がある場合には申し出なさい。
5. 解答の記入は黒鉛筆に限ります。
6. 文字ははっきり書きなさい。解答の文字が読みにくい場合、点を与えないことがあります。
7. 計算・下書きには計算用紙を用いなさい。
8. 解答用紙の点数欄には何も記入してはいけません。
9. 試験中、使用していない解答用紙は机の上に裏返しにしておきなさい。
10. 試験終了の合図がされたら、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ)のみ提出しなさい。計算用紙は提出の必要はありません。

問題は次のページより始まります。

1

放物線 $C: y = x^2 + bx + c$ は x 軸と相異なる 2 点で交わるとし、その交点を左から順に A, B とする。 x 軸上で B の右にある点 $P(t, 0)$ から、 A と B の間にある C の部分に接線をひき、その接点を Q とする。 Q から x 軸に下ろした垂線の足を R とするとき

$$RP^2 = AP \cdot BP$$

を証明せよ。

ただし、 Q から x 軸に下ろした垂線の足とは、 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点のことである。

(40 点)

2

空間の定点 O と 4 点 A_1, A_2, A_3, A_4 に対し、点 G を次式で定める。

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4})$$

空間の点 P が $|\overrightarrow{PG}| = 1$ を満たすとき

$$\sum_{k=1}^4 |\overrightarrow{PA_k}|^2 - \sum_{k=1}^4 |\overrightarrow{GA_k}|^2 = 4$$

を示せ。

(30 点)

3

楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の x 軸上にない点 P における C の法線 l と x 軸の交点を $Q(z, 0)$ とする。 x 軸上にない点 P が C 上を動いて点 $A(a, 0)$ に限りなく近づくとき、 z の極限値を求めよ。

ただし、 P における C の法線とは P を通り P における C の接線と直交する直線のことである。

(40 点)

4

a, b を実数とし、関数 $y = e^{a+bx^2}$ のグラフを C とする。

(1) C が点 $P(1, 1)$ を通り、 P での C の接線の傾きが -2 となる a, b を求めよ。

(2) a, b が (1) で求めた値であるとき、放物線 $y = x^2$ と曲線 C とで囲まれた図形のうち y 軸の右側にある部分を y 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

(40 点)