

$$\frac{2a+c}{2b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(2a+c) - a(2b+d)}{b(2b+d)} = \frac{bc-ad}{b(2b+d)} \quad \text{である。}$$

ここで a, b, c, d は全て正の数であり、 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ より $bc \geq ad$ である。

よって $\frac{bc-ad}{b(2b+d)} \geq 0$ より $\frac{2a+c}{2b+d} \geq \frac{a}{b}$ となることがわかる。…①

同様にして、

$$\frac{c}{d} - \frac{2a+c}{2b+d} = \frac{c(2b+d) - d(2a+c)}{d(2b+d)} = \frac{2(bc-ad)}{d(2b+d)} \geq 0 \quad \text{であるから、}$$

$$\frac{c}{d} \geq \frac{2a+c}{2b+d} \quad \text{となることがわかる。} \quad \dots \text{②}$$

以上①、②より $\frac{a}{b} \leq \frac{2a+c}{2b+d} \leq \frac{c}{d}$ であることが示された。

(証明終)

(1)

$X=4$ となるのは、出る目の組み合わせが $(1,1,2)$ の時であり、

この並べ方も考えて 3 通りである。

よって求める確率は、

$$\frac{3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{72}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{72}$$

(2)

$X=12$ となるのは、出る目の組み合わせが

$(1,5,6), (2,4,6), (2,5,5), (3,3,6), (3,4,5), (4,4,4)$

の時である。

よって、これらの場合の並べ方の総和は、

$6+6+3+3+6+1=25$ 通りであり、

$$\text{求める確率は} \quad \frac{25}{6 \times 6 \times 6} = \frac{25}{216}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{25}{216}$$

(3)

$X=m$ ($3 \leq m \leq 18$) となるときを考え、3 つの出る目を順に a_1, a_2, a_3 とすると、

$a_1 + a_2 + a_3 = m$ であり、 a_i ($i=1,2,3$) は $1 \leq a_i \leq 6$ を満たす整数である。

このとき、 $7-a_i$ ($i=1,2,3$) も $1 \leq 7-a_i \leq 6$ を満たす整数となり、

$X = (7-a_1) + (7-a_2) + (7-a_3) = 21 - (a_1 + a_2 + a_3) = 21 - m$ となる。

逆に、 $X=21-m$ となるときを考え、3 つの出る目を順に b_1, b_2, b_3 とすると、

上と全く同様の議論から、 $7-b_1, 7-b_2, 7-b_3$ の組が $X=m$ を満たすことが分かる。

つまり、 $X=m$ を満たす出る目の組 (a_1, a_2, a_3) と、 $X=21-m$ を満たす出る目の組 (b_1, b_2, b_3) が 1 対 1 に対応することが分かる。

従って、 $X=m$ のときの出る目の場合の数と、 $X=21-m$ のときの出る目の場合の数は等しい。

確率は、出る目の場合の数を $6^3 = 216$ で割ったものなので、両者の確率は等しくなり、題意は示された。

(証明終)

倍角の公式より、 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ であり、
与式の左辺は、

$$\cos 2x + 3\cos x - 1 = 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 \text{ となる。}$$

よって $\cos x = t$ と置くと、 $0^\circ \leq x < 360^\circ$ なので $-1 \leq t \leq 1$ であり、

$2t^2 + 3t - 2 < 0$ を考えればよいことがわかる。

$$\text{従って、} (2t-1)(t+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < t < \frac{1}{2}$$

$-1 \leq t \leq 1$ とあわせて $-1 \leq t < \frac{1}{2}$ となるので、

$$-1 \leq \cos x < \frac{1}{2} \text{ より } 60^\circ < x < 300^\circ$$

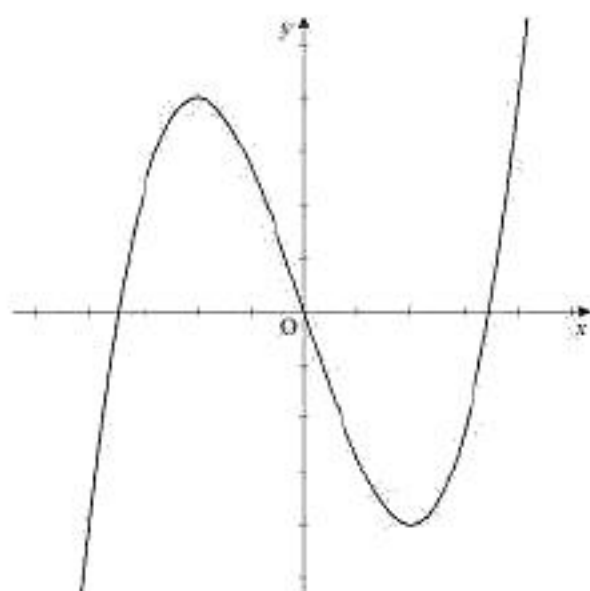
(答) $60^\circ < x < 300^\circ$

$f(x) = x^3 - 3a^2x$ と置き、 $y = f(x)$ と $y = b$ の交点の x 座標として $x^3 - 3a^2x - b = 0$ の解を考えることにする。

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x-a)(x+a)$ より次の増減表を得る。

x	...	$-a$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

このグラフは次のように原点对称なグラフになる。



$-1 \leq x \leq 1$ の範囲において $y = x^3 - 3a^2x$ と $y = b$ が交点をもつ条件を考えればよいので、このグラフの $-1 \leq x \leq 1$ の範囲における最大・最小値と b の値の大小を考える。

$y = f(x)$ は $f(\pm a) = f(\mp 2a) = \mp 2a^3$ (複号同順) であるから、

(i) $2a < 1 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

$f(1) = 1 - 3a^2$ が最大値、 $f(-1) = -1 + 3a^2$ が最小値となるので、

$-1 + 3a^2 \leq b \leq 1 - 3a^2$ のとき交点をもつ。

(ii) $a \leq 1 \leq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$f(-a) = 2a^3$ が最大値、 $f(a) = -2a^3$ が最小値となるので、

$-2a^3 \leq b \leq 2a^3$ のとき交点をもつ。

(iii) $a > 1$ のとき

$f(-1) = -1 + 3a^2$ が最大値、 $f(1) = 1 - 3a^2$ が最小値となるので、

$1 - 3a^2 \leq b \leq -1 + 3a^2$ のとき交点をもつ。

以上より、

(答) $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき、 $-1 + 3a^2 \leq b \leq 1 - 3a^2$

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき、 $-2a^3 \leq b \leq 2a^3$

$1 < a$ のとき、 $1 - 3a^2 \leq b \leq -1 + 3a^2$