

(1)

a, b の組み合わせは全部で $6^2 = 36$ 通り。そのうち得点が 3 であるような組み合わせは、

$$(a, b) = (3, 1), (3, 3), (3, 5), (2, 3), (4, 3), (6, 3)$$

の 6 通り。よって得点が 3 である確率は、

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(答) $\frac{1}{6}$

(2)

a が得点となるのは $a+b$ が偶数となる場合であり、そのような b は任意の a に対して 3 通りある。また、 b が得点となる場合も同様に考えられるので、求める得点の期待値は

$$(1+2+3+4+5+6) \times \frac{3}{36} \times 2 = \frac{7}{2}$$

(答) $\frac{7}{2}$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ より}$$

$$2^{4\cos^2 x} - 2^{3-4\cos^2 x} = 7$$

両辺に $2^{4\cos^2 x}$ をかけて

$$2^{8\cos^2 x} - 2^3 = 7 \cdot 2^{4\cos^2 x}$$

$$2^{4\cos^2 x} = t \ (t > 0) \text{ とおくと}$$

$$t^2 - 7t - 8 = 0$$

$$(t-8)(t+1) = 0$$

$t > 0$ より

$$t = 8$$

よって

$$2^{4\cos^2 x} = 8 = 2^3$$

$$4\cos^2 x = 3$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leq x < 360^\circ$ の範囲でこれを満たす x は、

$$x = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$$

である。

(答) $x = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$

$$\begin{aligned}
& |\overrightarrow{QP_1}|^2 + |\overrightarrow{QP_2}|^2 + |\overrightarrow{QP_3}|^2 - 3|\overrightarrow{OQ}|^2 \\
&= |\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OQ}|^2 - 3|\overrightarrow{OQ}|^2 \\
&= |\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{OP_2}|^2 + |\overrightarrow{OP_3}|^2 - 2\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OP_3} \cdot \overrightarrow{OQ} \\
&= |\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{OP_2}|^2 + |\overrightarrow{OP_3}|^2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3}) \\
&= |\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{OP_2}|^2 + |\overrightarrow{OP_3}|^2 \quad (\because \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \vec{0})
\end{aligned}$$

また、同様に

$$\begin{aligned}
& |\overrightarrow{RP_1}|^2 + |\overrightarrow{RP_2}|^2 + |\overrightarrow{RP_3}|^2 - 3|\overrightarrow{OR}|^2 \\
&= |\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{OP_2}|^2 + |\overrightarrow{OP_3}|^2 - 2\overrightarrow{OR} \cdot (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3}) \\
&= |\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{OP_2}|^2 + |\overrightarrow{OP_3}|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ。

以上より

$$|\overrightarrow{QP_1}|^2 + |\overrightarrow{QP_2}|^2 + |\overrightarrow{QP_3}|^2 - 3|\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{RP_1}|^2 + |\overrightarrow{RP_2}|^2 + |\overrightarrow{RP_3}|^2 - 3|\overrightarrow{OR}|^2$$

が示された。

(証明終)

(1)

$$y = x^3 - x$$

$$y' = 3x^2 - 1$$

なので、傾きが2である接線の接点の x 座標は、

$$2 = 3x^2 - 1$$

$$\therefore x = \pm 1$$

となる。

よって、求める接線の方程式は

$$y - (1^3 - 1) = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$

および、

$$y - \{(-1)^3 - (-1)\} = 2(x + 1)$$

$$y = 2x + 2$$

である。

(答) $y = 2x - 2, y = 2x + 2$

(2)

曲線 C と直線 $y = 2x + k$ の共有点の個数は、方程式 $x^3 - x = 2x + k$ の実数解の個数に等しい。

$$x^3 - x = 2x + k$$

$$x^3 - 3x = k$$

よって、求める共有点の個数は、曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = k$ の共有点の個数に等しい。

$f(x) = x^3 - 3x$ とおくと、

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

よって、 $f(x)$ について以下の増減表を得る。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

増減表より、グラフは次図のようになる。

グラフより、曲線 $y = x^3 - 3x$ と

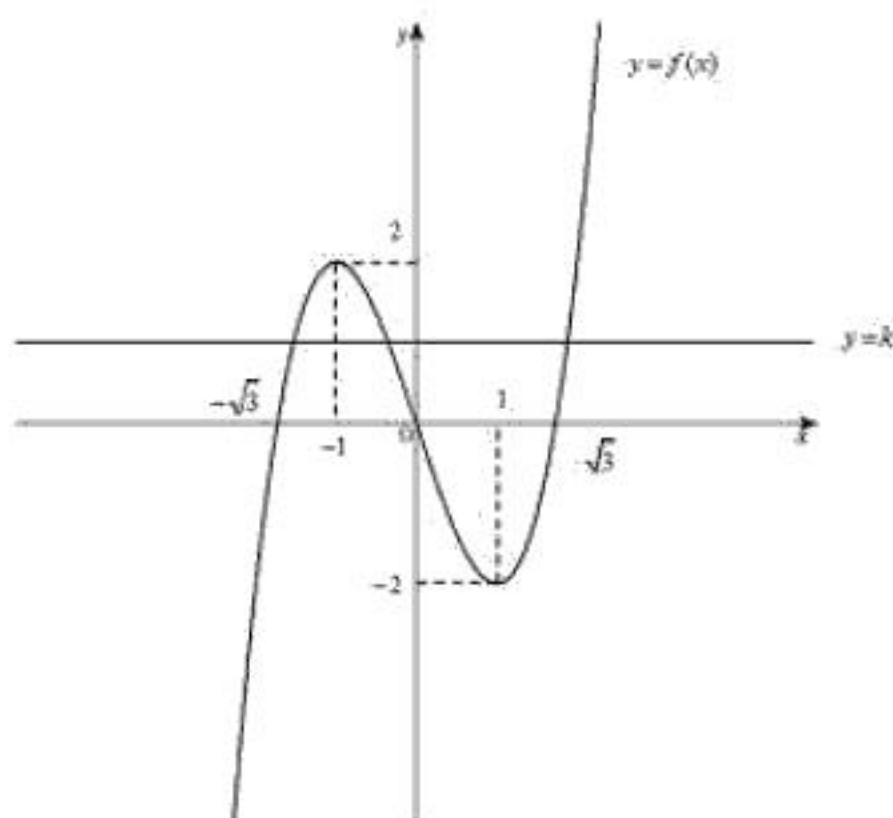
直線 $y = k$ の共有点の個数は、

$k < -2, 2 < k$ のとき1個

$k = \pm 2$ のとき2個

$-2 < k < 2$ のとき3個

となる。



(答) $k < -2, 2 < k$ のとき1個

$k = \pm 2$ のとき2個

$-2 < k < 2$ のとき3個