

1

n が自然数のとき、 $2^{6n-5} + 3^{2n}$ は11で割り切れることを数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき、 $2^{6-5} + 3^2 = 11$ は11で割り切れる。

(ii) $n = k$ (k は自然数) のとき、 $2^{6k-5} + 3^{2k}$ は11で割り切れると仮定すると、

$$2^{6k-5} + 3^{2k} = 11M \quad (M \text{ は自然数})$$

とおける。ここで、

$$\begin{aligned} 2^{6(k+1)-5} + 3^{2(k+1)} &= 2^6 \cdot 2^{6k-5} + 3^2 \cdot 3^{2k} \\ &= 64 \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 3^{2k} \\ &= 55 \cdot 2^{6k-5} + 9(2^{6k-5} + 3^{2k}) \\ &= 11 \cdot 5 \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 11M \\ &= 11(5 \cdot 2^{6k-5} + 9M) \end{aligned}$$

と変形でき、11で割り切れることがわかるので、 $n = k + 1$ のときも題意は成り立つ。

(i) (ii) より、題意は示された。 (証明終)

2

(1) コインを5回投げたあとの P の座標が k である確率を $P(X = k)$ とあらわす。

$$P(X = 0) = {}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32}$$

$$P(X = 1) = {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{32}$$

$$P(X = 2) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{10}{32}$$

$$P(X = 3) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{10}{32}$$

$$P(X = 4) = {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{32}$$

$$P(X = 5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{1}{32}$$

であるから、 $X \geq 2$ である確率は

$$P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{13}{16}$$

(答) $\frac{13}{16}$

(2) (1)の値を用いて、 X の期待値は

$$0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32}$$

$$= \frac{80}{32}$$

$$= \frac{5}{2}$$

(答) $\frac{5}{2}$

3

(1) 数列 $\{a_n\}$ の公差を d 、 $\{b_n\}$ の公比を $r(>0)$ とすると、一般項は

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot d$$

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot r^{n-1}$$

とあらわせる。 $(\because a_1 = 1, b_1 = 3)$

$$a_2 + 2b_2 = 21, a_4 + 2b_4 = 169 \text{ より,}$$

$$1 + d + 2 \cdot 3r = 21 \Leftrightarrow d + 6r = 20 \quad \cdots \text{ (イ)}$$

$$1 + 3d + 2 \cdot 3r^3 = 169 \Leftrightarrow d + 2r^3 = 56 \quad \cdots \text{ (ロ)}$$

2式より d を消去すると

$$\begin{aligned} 6r - 2r^3 &= -36 \Leftrightarrow r^3 - 3r - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow (r - 3)(r^2 + 3r + 6) = 0 \end{aligned}$$

これを解いて、 $r = 3$

$$r = 3 \text{ を(イ)に代入して、} d + 18 = 20 \therefore d = 2$$

よって一般項は

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$$

$$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$\text{(答) } a_n = 2n - 1, b_n = 3^n$$

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k - 1}{3^k}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

ここで、 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = T_n$ とおくと

$$T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n} \quad \cdots \text{ (ハ)}$$

$$\frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}} \quad \cdots \text{ (ニ)}$$

であるから、(ハ)から(ニ)を引いて、

$$\frac{2}{3} T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore T_n = \frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} - \frac{n}{2 \cdot 3^n}$$

$$\text{よって、} S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}$$

$$= 2T_n - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} - \frac{n}{3^n} - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{n}{3^n}$$

$$= 1 - \frac{n+1}{3^n}$$

$$\text{(答) } 1 - \frac{n+1}{3^n}$$

4

$$(1) f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c \text{ のとき, } f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$x = -2, 1$ で極値をとるので, $f'(x) = 0$ の解が $x = -2, 1$ である。

解と係数の関係より

$$-2 + 1 = -\frac{2a}{6} \Leftrightarrow -1 = -\frac{a}{3}$$

$$-2 \cdot 1 = \frac{b}{6} \Leftrightarrow -2 = \frac{b}{6}$$

よって, $a = 3, b = -12$

(答) $a = 3, b = -12$

$$(2) f(x) < 2c^2 + 2c \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x + c < 2c^2 + 2c$$

$$\Leftrightarrow g(x) < 2c^2 + c$$

である。($g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ とおいた。)

$-3 \leq x \leq 3$ を満たすすべての x に対して,

$$g(x) < 2c^2 + c$$

が成り立つための条件は,

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ における } g(x) \text{ の最大値 } < 2c^2 + c \quad \cdots (*)$$

が成り立つことである。

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2)$$

であるから, $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	...	-2	...	1	...	3
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	9	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	45

増減表より, $g(x)$ の最大値は $g(3) = 45$ であるから, $(*)$ の条件は,

$$45 < 2c^2 + c \Leftrightarrow (2c-9)(c+5) > 0$$

$$\Leftrightarrow c < -5, \frac{9}{2} < c$$

(答) $c < -5, \frac{9}{2} < c$