

まず、 $4x - x^2 = -x(x-4) \geq 0$ でなくてはならないので、 $0 \leq x \leq 4$

この条件下で考えると、

$\sqrt{4x - x^2} \geq 0$ より、右辺の正負にまず注目すると、

(i) $3 < x \leq 4$ のとき $3 - x < 0$ であるから、不等式は常に成り立つ。

(ii) $0 \leq x \leq 3$ のとき

不等式の両辺は共に正のため、両辺を二乗しても大小は変わらない。

$4x - x^2 > 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 9 < 0$ を解くと、 $\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

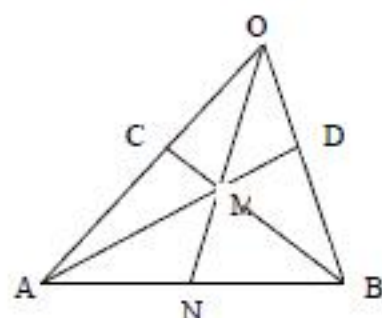
ここで $5 > \sqrt{7}$ より $\frac{5-\sqrt{7}}{2} > 0$

$\sqrt{7} > 1$ より $\frac{5+\sqrt{7}}{2} > \frac{5+1}{2} = 3$

よって $0 \leq x \leq 3$ と合わせて $\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x \leq 3$ となる。

以上より、求める x の範囲は $\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x \leq 4$

(答) $\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x \leq 4$



- (1) 題意より, $\overrightarrow{OC} = p\vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = q\vec{b}$ であり, t, s をともに実数として,
 $AM:MD = t:1-t$ とすると, $\overrightarrow{OM} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OD} = (1-t)\vec{a} + tq\vec{b}$
 $CM:MB = s:1-s$ とすると, $\overrightarrow{OM} = (1-s)\overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{OB} = (1-s)p\vec{a} + s\vec{b}$
 と表される。 $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに一次独立なので, 係数を比較すると,

$$\begin{cases} 1-t = p(1-s) \\ tq = s \end{cases} \quad \text{より, } 0 < p < 1, 0 < q < 1 \Rightarrow pq \neq 1 \text{ を考慮して,}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1-p}{1-pq} \\ s = \frac{q(1-p)}{1-pq} \end{cases} \quad \text{よって, } \overrightarrow{OM} = \frac{p(1-q)}{1-pq}\vec{a} + \frac{q(1-p)}{1-pq}\vec{b}$$

$$\text{よって, } x = \frac{p(1-q)}{1-pq}, y = \frac{q(1-p)}{1-pq}$$

$$(\text{答}) \quad x = \frac{p(1-q)}{1-pq}, y = \frac{q(1-p)}{1-pq}$$

- (2) 実数 k を用いて, $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$ と表すことができる。

$$\text{よって, } \overrightarrow{ON} = \frac{kp(1-q)}{1-pq}\vec{a} + \frac{kq(1-p)}{1-pq}\vec{b} \quad \text{となり, } N \text{ は辺 } AB \text{ 上の点であるから,}$$

$$\frac{kp(1-q)}{1-pq} + \frac{kq(1-p)}{1-pq} = 1 \quad \text{よって, } k = \frac{1-pq}{p+q-2pq} \quad \text{となるので,}$$

$$(\text{但し, } p+q-2pq = p(1-q) + q(1-p) \neq 0 \quad \because p(1-q) > 0, q(1-p) > 0)$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq}\vec{a} + \frac{q(1-p)}{p+q-2pq}\vec{b} \quad \text{となる。}$$

$$\text{よって, } z = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq}, w = \frac{q(1-p)}{p+q-2pq} \quad \text{となることがわかる。}$$

$$(\text{答}) \quad z = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq}, w = \frac{q(1-p)}{p+q-2pq}$$

三角関数の合成を考えて、 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ となるので、

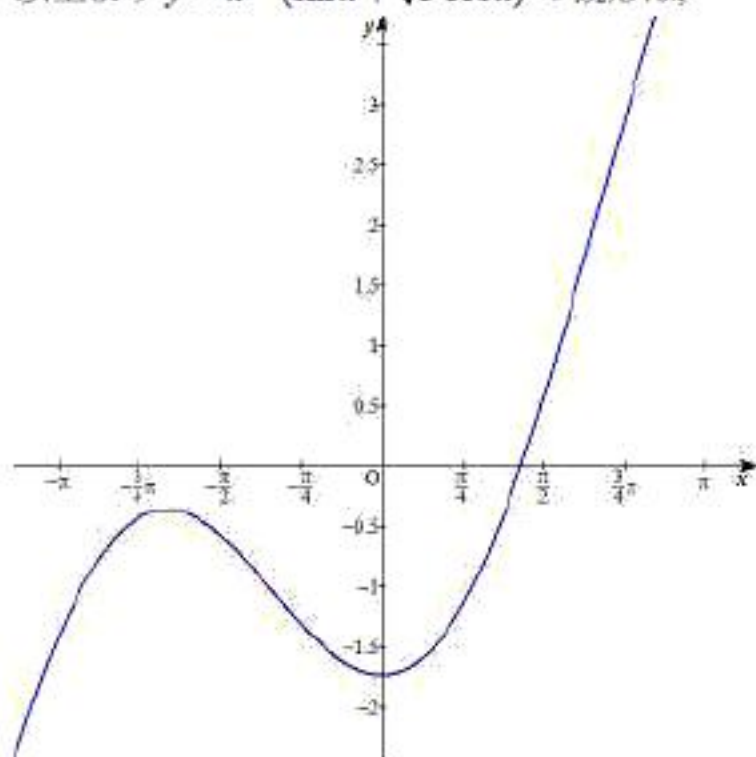
$$y = x - (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = x - 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ となる。}$$

よってこの両辺を x で微分すると $y' = 1 - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ となり、

下のような増減表を得る。

x	$-\pi$	$\dots$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\dots$	0	$\dots$	π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\pi + \sqrt{3}$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\pi + \sqrt{3}$

以上より $y = x - (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$ の概形は、



となる。

従って、 $x = \pi$ で最大値 $\pi + \sqrt{3}$

また、 $\pi < 3.2$, $1.7 < \sqrt{3}$ なので、 $2\sqrt{3} > 3.4 > 3.2 > \pi$

つまり、 $-\pi + \sqrt{3} > -\sqrt{3}$ なので、 $x = 0$ で最小値 $-\sqrt{3}$ をとる。

(答) 最大値 $\pi + \sqrt{3}$ ($x = \pi$) , 最小値 $-\sqrt{3}$ ($x = 0$)

- (1) 接線 l の方程式は、円の接線に関する公式から $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 2$

となる。放物線 $y = ax^2 + b$ の $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ における接線の方程式は、

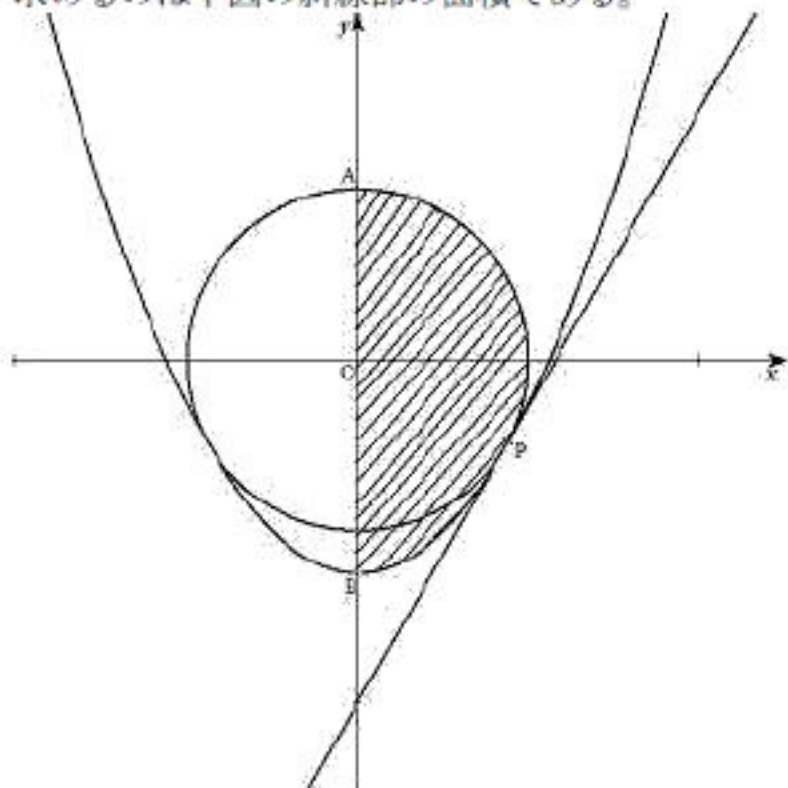
$$y' = 2ax \text{ を用いて, } y = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{3}{4}a + b \Leftrightarrow y = \sqrt{3}ax - \frac{3}{4}a + b$$

となる。これが $y = \sqrt{3}x - 2$ に一致すればよいので、係数比較して

$$\sqrt{3}a = \sqrt{3}, -\frac{3}{4}a + b = -2 \Leftrightarrow a = 1, b = -\frac{5}{4}$$

$$(\text{答}) \ a = 1, b = -\frac{5}{4}$$

- (2) 求めるのは下図の斜線部の面積である。



$\angle AOP = \frac{2}{3}\pi$ であり、放物線は $y = x^2 - \frac{5}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ -\left(x^2 - \frac{5}{4} \right) \right\} dx - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{3}\pi + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{1}{3}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \ \frac{1}{3}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

- (3) 放物線の方程式を変形して $x = \pm\sqrt{y + \frac{5}{4}}$ とし、

円の方程式を変形して $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ とする。

これを用いると求める体積は、

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{5}{4}}^{-\frac{1}{2}} \pi \left(\sqrt{y + \frac{5}{4}} \right)^2 dy + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \pi \left(\sqrt{1 - y^2} \right)^2 dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{4}y \right]_{-\frac{5}{4}}^{-\frac{1}{2}} + \pi \left[y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{8} - \frac{25}{32} + \frac{25}{16} \right) + \pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) \\ &= \frac{45}{32}\pi \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \ \frac{45}{32}\pi$$