

数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n = 2$ のとき

$$2^{2^2} - 6 = 10$$

となり、10 で割り切れる。

[2] $n = k$ (k は 2 以上の自然数) のとき、 $2^{2^k} - 6$ が 10 で割り切れると仮定すると、

$$2^{2^k} - 6 = 10m \quad (m \text{ は自然数})$$

とおける。このとき

$$\begin{aligned} 2^{2^{k+1}} - 6 &= \left(2^{2^k}\right)^2 - 6 \\ &= (10m + 6)^2 - 6 \\ &= 100m^2 + 120m + 30 \\ &= 10(10m^2 + 12m + 3) \end{aligned}$$

となる。 $10m^2 + 12m + 3$ は自然数であるため、 $2^{2^{k+1}} - 6$ は 10 で割り切れる。

[1], [2] より、2 以上の自然数 n に対して $2^{2^n} - 6$ は 10 で割り切れることが示された。

(証明終)

(1)

n は 2 つのサイコロの目の和なので、 $2 \leq n \leq 12$ を満たす自然数である。

得点が 9、すなわち $m = 9$ となるのは $n = 9$ のときのみである。

$n = 9$ となる目の出方は $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ の 4 通りである。

2 つのサイコロの目の出方は全部で $6^2 = 36$ 通りなので、 $m = 9$ となる確率は

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

である。

(答) $\frac{1}{9}$

(2)

得点が 1、すなわち $m = 1$ となるのは $n = 2, 4, 8$ のときである。

$n = 2$ となる目の出方は $(1, 1)$ の 1 通りである。

$n = 4$ となる目の出方は $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ の 3 通りである。

$n = 8$ となる目の出方は $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ の 5 通りである。

よって、 $m = 1$ となる確率は

$$\frac{1+3+5}{36} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(3)

m のとり得る値は、 $1 \leq m \leq 12$ を満たす奇数である。

$m = 1, 9$ の場合は (1), (2) で考えたので、残りの場合について考える。

$m = 3$ となるのは $n = 3, 6, 12$ のときであり、目の出方はそれぞれ 2, 5, 1 通りである。

$m = 5$ となるのは $n = 5, 10$ のときであり、目の出方はそれぞれ 4, 3 通りである。

$m = 7$ となるのは $n = 7$ のときであり、目の出方は 6 通りである。

$m = 11$ となるのは $n = 11$ のときであり、目の出方は 2 通りである。

よって、得点の期待値は

$$9 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{2+5+1}{36} + 5 \times \frac{4+3}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 11 \times \frac{2}{36} = \frac{14}{3}$$

である。

(答) $\frac{14}{3}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \cdots ① \\ 3x + 4y = k \cdots ② \end{cases}$$

とおく。②を変形すると、

$$y = \frac{k-3x}{4}$$

となる。よって、実数 x, y が①、②を同時に満たすとき、

$$x^2 + \left(\frac{k-3x}{4} \right)^2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - (32+6k)x + k^2 = 0 \cdots ③$$

が成り立つ。③が実数解を持つとき、①、②を同時に満たす実数 x, y が存在する。

この条件は、③の判別式を D とすると、

$$D/4 = (16+3k)^2 - 25k^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 6k - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (k+2)(k-8) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq k \leq 8$$

となる。よって、 k の最大値は8、 k の最小値は-2である。

(答) 最大値8, 最小値-2

点 P の x 座標を p とおくと、点 P の座標は $(p, p^2 + a)$ である。また、 $y = x^2 + a$ の導関数は

$$y' = 2x$$

なので、接線 l の方程式は

$$y - (p^2 + a) = 2p(x - p)$$

$$\therefore y = 2px - p^2 + a \cdots \textcircled{1}$$

である。①と $y = x^2$ のグラフの交点 Q, R の x 座標は

$$x^2 = 2px - p^2 + a$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 - a = 0 \cdots \textcircled{2}$$

の 2 解である。②の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} D/4 &= p^2 - (p^2 - a) \\ &= a > 0 \end{aligned}$$

であるから、②は常に 2 実数解をもつ。

この 2 実数解がそれぞれ α, β なので、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2p \cdots \textcircled{3} \\ \alpha\beta = p^2 - a \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

である。③、④を用いると

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4p^2 - 4(p^2 - a) \\ &= 4a \end{aligned}$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = 2\sqrt{a} \quad (\because a > 0)$$

となるため、 $|\alpha - \beta|$ は p によらず、確かに P の取り方によらないことが示された。