

(1)

 $f(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - x - 2 \\ &= (x-2)(x+1) \end{aligned}$$

となり, 増減表は次のようになる。

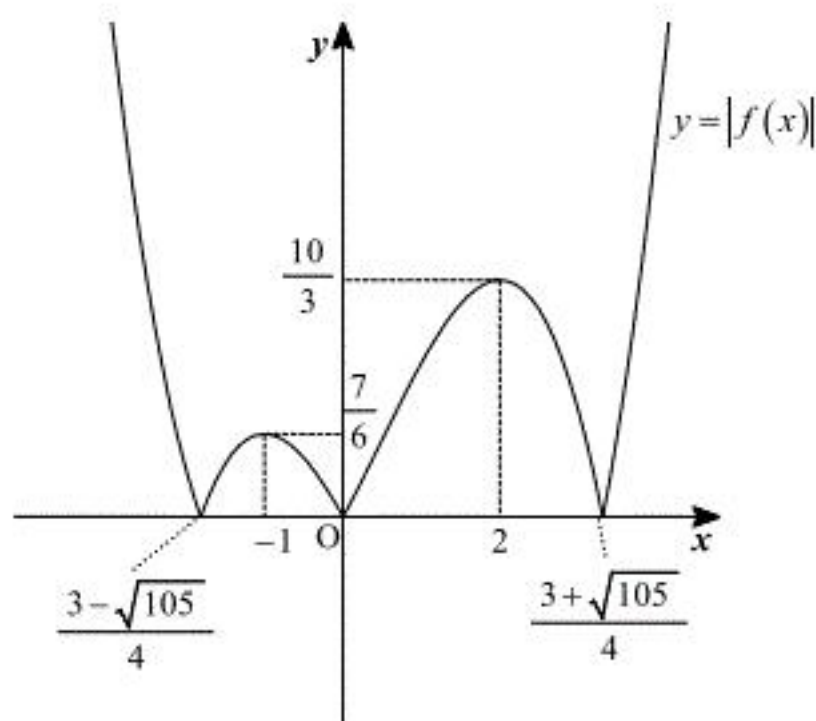
x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{7}{6}$	↘	$-\frac{10}{3}$	↗

増減表より, $f(x)$ は $x=-1$ のとき極大値 $\frac{7}{6}$, $x=2$ のとき極小値 $-\frac{10}{3}$ をとる。(答) 極大値 $\frac{7}{6}$ ($x=-1$ のとき), 極小値 $-\frac{10}{3}$ ($x=2$ のとき)

(2)

 $f(x)=0$ の解は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(2x^2 - 3x - 12) &= 0 \\ \therefore x &= 0, \frac{3 \pm \sqrt{105}}{4} \end{aligned}$$

である。これと, (1) の答を用いると, $y=|f(x)|$ のグラフは次図のようになる。

(答)

対数の底を7にそろえると,

$$\log_2 7 = \frac{1}{\log_7 2}$$

$$\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3}$$

$$\log_m 7 = \frac{1}{\log_7 m} \quad (\text{底の条件より } m \neq 1 \text{ すなわち } m \geq 2 \text{ なので, } \log_7 m > 0 \text{ である})$$

となる。これらを問の不等式に代入して整理すると,

$$\log_7 2 + \log_7 3 + \log_7 m < 4$$

$$\log_7 6m < 4$$

$$6m < 7^4 = 2401$$

$$m < \frac{2401}{6} = 400. \dots$$

となるため, 不等式を満たす最大の自然数 m は 400 である。

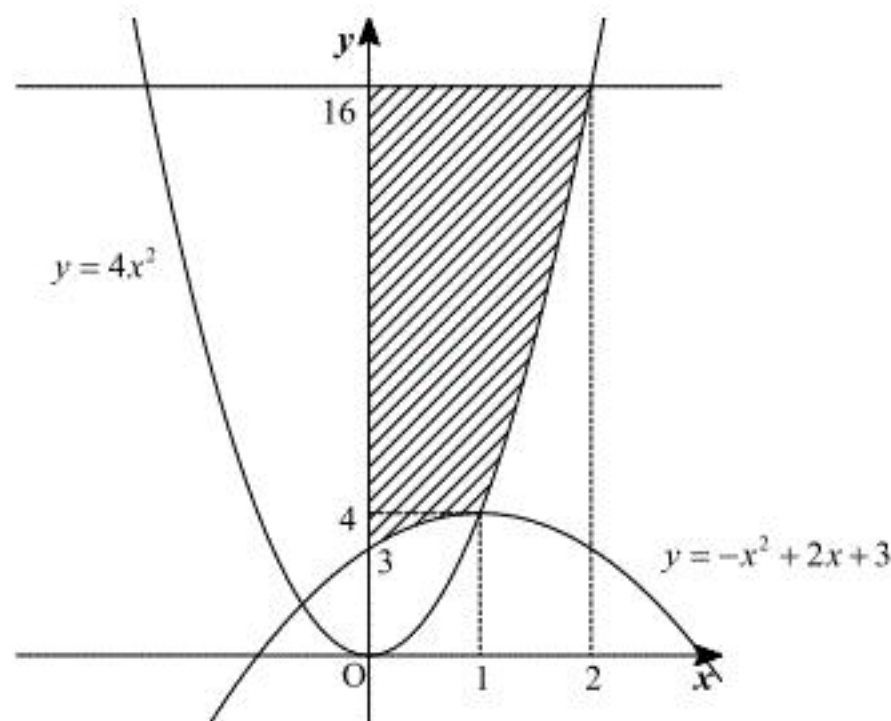
$y = 4x^2$ と $y = -x^2 + 2x + 3$ の交点の x 座標を求める。2 式を連立して解くと、

$$4x^2 = -x^2 + 2x + 3$$

$$(x-1)(5x+3) = 0$$

$$\therefore x = 1, -\frac{3}{5}$$

よって、与えられた連立不等式の表す領域は次図の斜線部分である。



これより、求める面積は

$$\begin{aligned} & 2 \times 16 - \left\{ \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3) dx + \int_1^2 4x^2 dx \right\} \\ &= 32 - \left(\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^3 \right]_1^2 \right) \\ &= 32 - \left(\frac{11}{3} + \frac{32}{3} - \frac{4}{3} \right) \\ &= 19 \end{aligned}$$

である。

(1)

$X=5$ となるのは、先に取り出した4個が赤、白2個ずつのときであり、5個目は赤、白どちらでも良い。よって、求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_5C_2 \times {}_4C_2}{{}_9C_4} &= \frac{10 \times 6}{126} \\ &= \frac{10}{21}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{10}{21}$$

(2)

$X=3$ となるのは赤、白のいずれかを3個連続して取り出すときなので、その確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_5C_3 + {}_4C_3}{{}_9C_3} &= \frac{10 + 4}{84} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

である。 X のとり得る値は3, 4, 5のみなので、 $X=4$ となる確率は、余事象の確率を考えて

$$1 - \left(\frac{10}{21} + \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{14}$$

である。したがって、 X の期待値は

$$3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{5}{14} + 5 \times \frac{10}{21} = \frac{181}{42}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{181}{42}$$