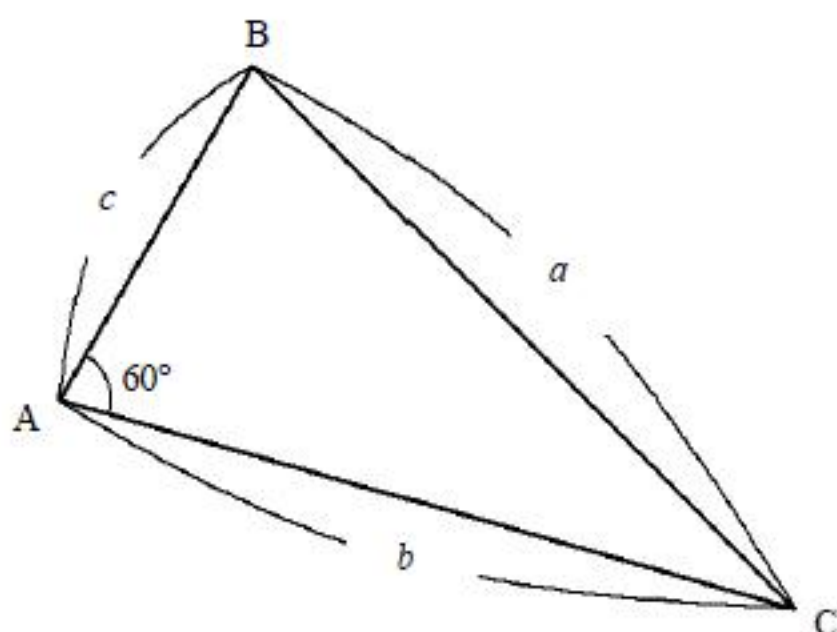


1

(1)



余弦定理より,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ \\ &= (4c)^2 + c^2 - 2 \cdot 4c \cdot c \cdot \frac{1}{2} \\ &= 13c^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{c} = \sqrt{13}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{c} = \sqrt{13}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} &= \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \\ &= \frac{\cos B \sin C + \cos C \sin B}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sin(180^\circ - A)}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sin 120^\circ}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin B \sin C} \end{aligned}$$

である。ここで、正弦定理より,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin B \sin C} &= \left(\frac{a}{b \sin A} \right) \left(\frac{a}{c \sin A} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{13})^2 c^2}{4c^2 \sin^2 60^\circ} \\ &= \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{13}{3} \\ &= \frac{13\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{13\sqrt{3}}{6}$$

(1)

サイコロの目の出方は同様に確からしいとする。

点 P が正, 負の向きに進む確率は, それぞれ

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。サイコロを 5 回投げる間に P が数直線の正の側に出る場合は, P の座標が

- ・ $0 \rightarrow 1$
- ・ $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$
- ・ $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$
- ・ $0 \rightarrow -1 \rightarrow -2 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$

と推移する場合であり, その確率は,

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{214}{243}$$

である。よって, 求める確率は,

$$1 - \frac{214}{243} = \frac{29}{243}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{29}{243}$$

(2)

サイコロを 1 回投げたあとの P の座標の期待値は,

$$1 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

である。それぞれの試行は独立であるので, X の期待値は,

$$\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{3}$$

$a_n = 6^n b_n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) とおくと,

$$a_n = 2a_{n-1} + 2 \cdot 6^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 6^n b_n = 2 \cdot 6^{n-1} b_{n-1} + 2 \cdot 6^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 6b_n = 2b_{n-1} + 2$$

$$\Leftrightarrow b_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(b_{n-1} - \frac{1}{2} \right)$$

となる。ここで,

$$b_1 = \frac{a_1}{6} = \frac{1}{3}$$

なので,

$$b_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(b_1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

である。したがって,

$$a_n = 6^n b_n = \frac{1}{2} (6^n - 2^n)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2} (6^n - 2^n)$$

(1)

点 $Q(q, q^2)$ とおくと,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= q^2 + (q^2 - a)^2 \\ &= q^4 - 2\left(a - \frac{1}{2}\right)q^2 + a^2 \\ &= \left\{q^2 - \left(a - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。以下 $q^2 - \left(a - \frac{1}{2}\right)$ の値に注意して、 a の値について場合分けすることで考える。

[1] $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

$$q^2 - \left(a - \frac{1}{2}\right) = q^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)$$

は $q = 0$ で最小値をとる。よって、 PQ は $q = 0$ で最小値

$$PQ = \sqrt{0 + (0 - a)^2} = a \quad (\because a > 0)$$

をとる。

[2] $a \geq \frac{1}{2}$ のとき

$$q^2 - \left(a - \frac{1}{2}\right)$$

は $q = \pm\sqrt{a - \frac{1}{2}}$ で最小値をとる。よって、 PQ は $q = \pm\sqrt{a - \frac{1}{2}}$ で最小値

$$PQ = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$$

をとる。

(答) PQ の最小値とそのときの点 Q の値は

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき,} & PQ = a, Q(0, 0) \\ a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき,} & PQ = \sqrt{a - \frac{1}{4}}, Q\left(\pm\sqrt{a - \frac{1}{2}}, a - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

(2)

(1)の結果を利用すると、 $a = 5$ のとき、 Q_1, Q_2 の座標は

$$\left(\frac{\pm 3\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

とかける。

$y = x^2$ について、 $y' = 2x$ であるから、 l_1, l_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \left(\frac{\pm 3\sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{\pm 3\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \pm 3\sqrt{2}x - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{cases} y = -3\sqrt{2}x - \frac{9}{2} \\ y = 3\sqrt{2}x - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

であるから、 R の座標は $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$ となる。

(答) $l_1, l_2: y = \pm 3\sqrt{2}x - \frac{9}{2}$

$$R\left(0, -\frac{9}{2}\right)$$