

**1**

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(答) \quad A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)の結果より,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2n+1 & n \\ -4n & 2n+1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

となることが推測できる。この仮定が正しいことを数学的帰納法で示す。

[1]  $n=1$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は成立する。

[2]  $n=k$ のとき

$$A^k = \begin{pmatrix} -2k+1 & k \\ -4k & 2k+1 \end{pmatrix}$$

が成立すると仮定すると,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= \begin{pmatrix} -2k+1 & k \\ -4k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2k-1 & k+1 \\ -4k-4 & 2k+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(k+1)+1 & k+1 \\ -4(k+1) & 2(k+1)+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成立する。

以上[1], [2]より, 自然数  $n$  について,  $A^n = \begin{pmatrix} -2n+1 & n \\ -4n & 2n+1 \end{pmatrix}$  であることが示された。

$$(答) \quad A^n = \begin{pmatrix} -2n+1 & n \\ -4n & 2n+1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\det(A^n) = (-2n+1)(2n+1) + 4n^2 = 1$$

であるから,

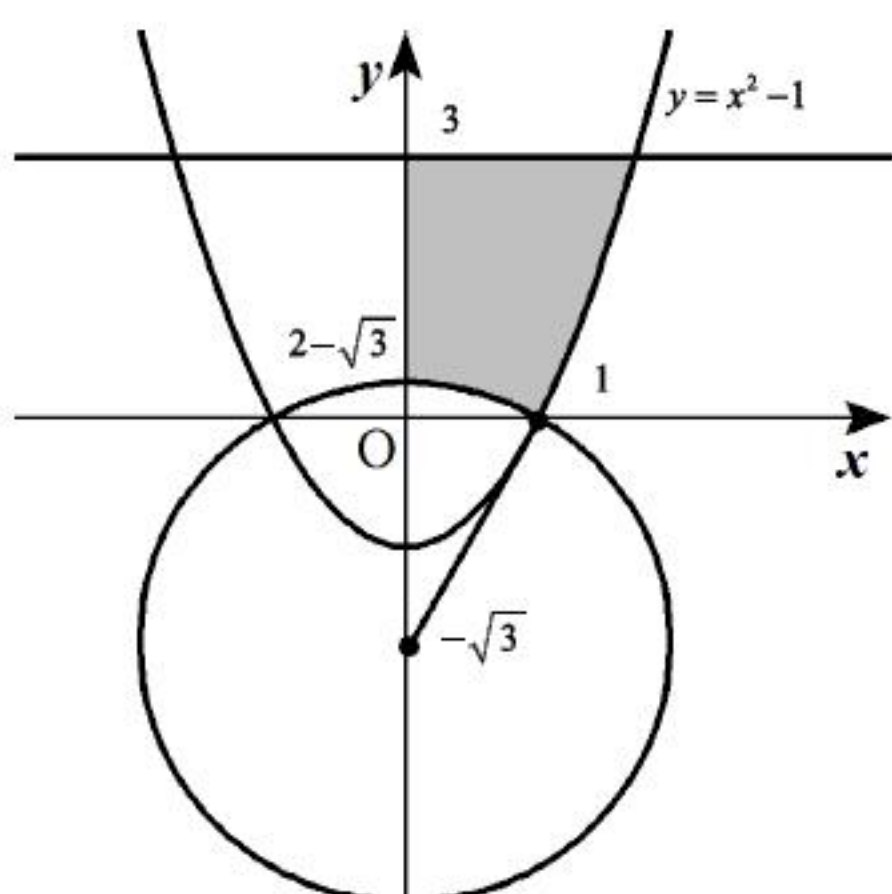
$$(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(答) \quad (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

2

(1)



D は上図で塗りつぶされた部分である。

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$$

であるから、この式の表す曲線は中心  $(0, -\sqrt{3})$ 、半径 2 の円である。

ここで、円の中心  $(0, -\sqrt{3})$  と原点 O と点  $(1, 0)$  を結んでできる直角三角形を考えると、3 辺の比が  $1:2:\sqrt{3}$  となっているので、円の中心点における直角三角形の内角は  $30^\circ$  である。したがって、第 1 象限において円  $x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0$  と  $x$  軸、および  $y$  軸で囲まれた部分の面積を  $S_1$  とする。

$$S_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。また、

$$y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1}$$

であるから、D の面積を  $S$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \sqrt{y+1} \, dy - S_1 \\ &= \left[ \frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 - \left( \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{14}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{14}{3}$$

(2)

求める体積を  $V$  とする。

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 - (y + \sqrt{3})^2$$

であるから、

$$V = \pi \int_0^3 (y+1) \, dy - \pi \int_0^{2-\sqrt{3}} \left\{ 4 - (y + \sqrt{3})^2 \right\} \, dy$$

となる。ここで、 $y + \sqrt{3} = 2 \sin \theta$  と置換すると、 $dy = 2 \cos \theta \, d\theta$  であり、

|          |                                           |
|----------|-------------------------------------------|
| $y$      | $0 \rightarrow 2 - \sqrt{3}$              |
| $\theta$ | $\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ |

であるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 (y+1) \, dy - \pi \int_0^{2-\sqrt{3}} \left\{ 4 - (y + \sqrt{3})^2 \right\} \, dy \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2}y^2 + y \right]_0^3 - \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4 \sin^2 \theta) \cdot 2 \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{15}{2}\pi - 8\pi \left[ \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{15}{2}\pi - 8\pi \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right\} \\ &= \left( 3\sqrt{3} + \frac{13}{6} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left( 3\sqrt{3} + \frac{13}{6} \right) \pi$$



$$\sin x + \sin y \geq \cos x + \cos y$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x + \sin y - \cos y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x-y}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x-y}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \text{ かつ } \cos\frac{x-y}{2} \geq 0 \right]$$

$$\text{または } \left[ \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \text{ かつ } \cos\frac{x-y}{2} \leq 0 \right]$$

である。ここで、

$$0 \leq x+y \leq 4\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$$

$$-2\pi \leq x-y \leq 2\pi \Leftrightarrow -\pi \leq \frac{x-y}{2} \leq \pi$$

であるから、

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \text{ かつ } \cos\frac{x-y}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \pi \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{\pi}{2} \leq y \leq -x + \frac{5}{2}\pi \text{ かつ } x - \pi \leq y \leq x + \pi$$

となる。また、

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \text{ かつ } \cos\frac{x-y}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ -\frac{\pi}{4} \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq 0 \text{ または } \pi \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi \right]$$

$$\text{かつ } \left[ -\pi \leq \frac{x-y}{2} \leq -\frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} \leq \pi \right]$$

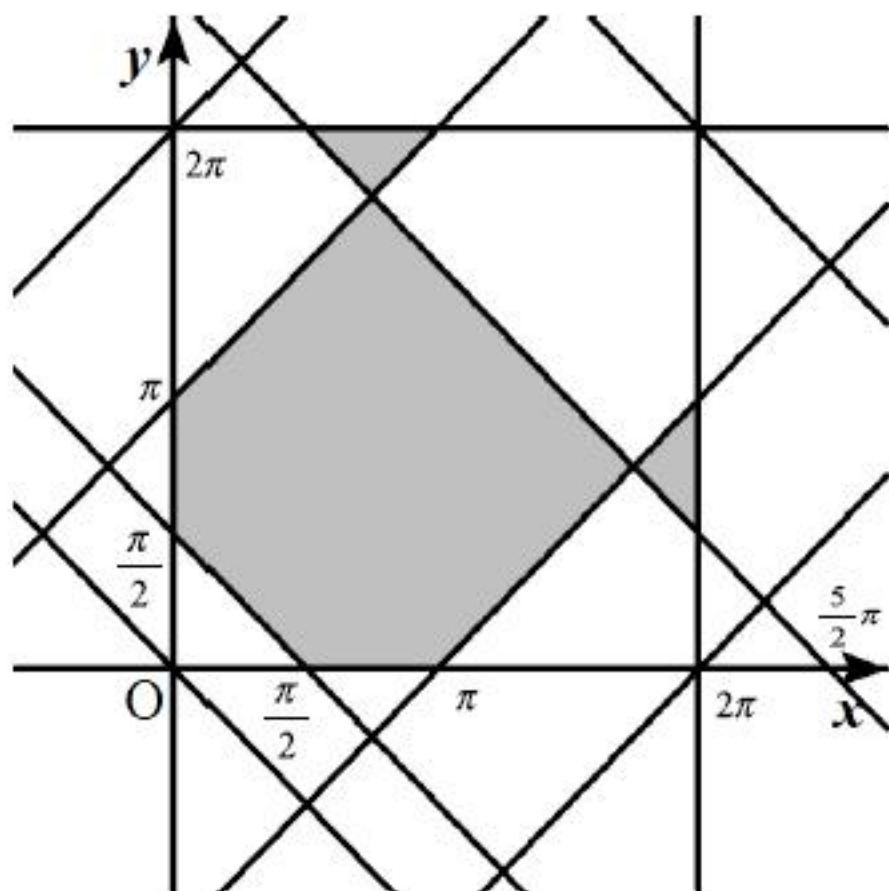
$$\Leftrightarrow \left[ -x \leq y \leq -x + \frac{\pi}{2} \text{ または } -x + \frac{5}{2}\pi \leq y \leq -x + 4\pi \right]$$

$$\text{かつ } \left[ x + \pi \leq y \leq x + 2\pi \text{ または } x - 2\pi \leq y \leq x - \pi \right]$$

となる。以上より、 $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$  のとき、不等式

$$\sin x + \sin y \geq \cos x + \cos y$$

の表す領域は、次図で塗りつぶされた部分となる。(ただし、境界はすべて含む。)



(1)

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_0^1 \frac{ax^2 + (a^2 + 2a)x + 2a^2 - 2a + 4}{(x+a)(x+2)} dx \\
 &= \int_0^1 \left\{ \frac{a(x+a)(x+2)}{(x+a)(x+2)} + \frac{-2a+4}{(x+a)(x+2)} \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \left( a + \frac{2}{x+a} - \frac{2}{x+2} \right) dx \\
 &= \left[ ax + 2\log(x+a) - 2\log(x+2) \right]_0^1 \\
 &= a + 2\log(a+1) - 2\log a - 2\log 3 + 2\log 2
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad F(a) = a + 2\log(a+1) - 2\log a - 2\log 3 + 2\log 2$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{da} F(a) &= 1 + \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a} \\
 &= \frac{a^2 + a - 2}{a(a+1)} \\
 &= \frac{(a-1)(a+2)}{a(a+1)}
 \end{aligned}$$

であるから、 $a > 0$  における  $F(a)$  の増減表は次のようになる。

|                     |                                                                                     |            |                         |            |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------|------------|
| $a$                 | (0)                                                                                 | ...        | 1                       | ...        |
| $\frac{d}{da} F(a)$ |  | -          | 0                       | +          |
| $F(a)$              |  | $\searrow$ | $1 + 4\log 2 - 2\log 3$ | $\nearrow$ |

増減表から、 $a=1$  のとき  $F(a)$  は最小値  $1 + 4\log 2 - 2\log 3$  をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } 1 + 4\log 2 - 2\log 3 \quad (a=1 \text{ のとき})$$