

$$3n+4=(m-1)(n-m)$$

$$\Leftrightarrow (m-4)n=m^2-m+4$$

となる。ここで、 $m=4$ とすると等式は成り立たないので、さらに両辺を $m-4$ で割り、

$$\Leftrightarrow n = \frac{m^2 - m + 4}{m - 4}$$

$$= m + 3 + \frac{16}{m - 4}$$

と変形できる。よって、 $m-4$ は 16 の約数であることが分かる。

さらに m が自然数であることから、

$$m \geq 1 \Leftrightarrow m-4 \geq -3$$

となり、

$$m-4 = -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16$$

と求まる。条件 $n \geq 1$ に注意すると、このうち、 $m-4 = -2, -1$ は不適である。

以上より、

$$m-4 = 1, 2, 4, 8, 16 \Leftrightarrow m = 5, 6, 8, 12, 20$$

であり、各々に対応する n を計算して、

$$(m, n) = (5, 24), (6, 17), (8, 15), (12, 17), (20, 24)$$

が求まる。

$$(\text{答}) \quad (m, n) = (5, 24), (6, 17), (8, 15), (12, 17), (20, 24)$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$$

の2つのグラフが接していることから、 y を消去して得られる2次方程式 $x^2 - ax - b = 0$ の判別式 D_1 について

$$D_1 = a^2 + 4b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。同様にして、

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = ax + b \end{cases}$$

から得られる2次方程式 $x^2 + (a-4)x + b+3 = 0$ の判別式 D_2 についても、

$$D_2 = (a-4)^2 - 4(b+3) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①+②より

$$a^2 + (a-4)^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \pm \sqrt{2}$$

と求まり、これと①から、

$$(a, b) = \left(2 + \sqrt{2}, -\frac{3+2\sqrt{2}}{2} \right), \left(2 - \sqrt{2}, -\frac{3-2\sqrt{2}}{2} \right)$$

が求まる。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(2 + \sqrt{2}, -\frac{3+2\sqrt{2}}{2} \right), \left(2 - \sqrt{2}, -\frac{3-2\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x + 2(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x \\
 &= -4\sin^3 x - 4\sin^2 x + 7\sin x + 2
 \end{aligned}$$

となる。 $\sin x = X$ とおくと、 $-1 \leq X \leq 1$ である。なので、以下、

$$g(X) = -4X^3 - 4X^2 + 7X + 2 \quad (-1 \leq X \leq 1)$$

の増減を考える。

$$\begin{aligned}
 g(X) &= -12X^2 - 8X + 7 \\
 &= -(2X - 1)(6X + 7)
 \end{aligned}$$

であるので、増減表は以下のようになる。

X	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(X)$		+	0	-	
$f(X)$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

したがって、増減表より、 $X = \frac{1}{2}$ ，すなわち、 $x = 30^\circ, 150^\circ$ のとき、最大値 4 をとり、また、

$X = -1$ ，すなわち、 $x = 270^\circ$ のとき、最小値 -5 である。

(答) $x = 30^\circ, 150^\circ$ のとき、最大値 4， $x = 270^\circ$ のとき、最小値 -5

(1)

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = \frac{1}{2}x^2 + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(1-a)x - 2b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が異なる 2 つの実数解をもつことから、①の判別式 D について、

$$D = 4(a-1)^2 + 8b > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。この条件下で、①の 2 実数解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(a-1) \\ \alpha\beta = -2b \end{cases}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4(a-1)^2 + 8b (= D > 0) \end{aligned}$$

であるから、囲まれる面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(ax + b - \frac{1}{2}x^2 - x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12} \left\{ (\beta - \alpha)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{12} \left\{ 4(a-1)^2 + 8b \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。これを整理すると、

$$b = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt[3]{18} - 2(a-1)^2 \right\}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt[3]{18} - 2(a-1)^2 \right\}$$

(2)

(1)の結果より、 b は a の 2 次関数で、グラフは上に凸であるため、 $a=1$ のときの $b = \frac{\sqrt[3]{18}}{4}$

が最大値であり、このとき、条件②を満たすので、 L と C は異なる 2 点で交わる。

よって、 $a=1$ における $b = \frac{\sqrt[3]{18}}{4}$ が最大値である。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{\sqrt[3]{18}}{4}$$