

1

取り出された 9 個の球のうち赤球が 5 個である確率は,

$$\begin{aligned}\frac{{}_5C_5 \cdot {}_{15}C_4}{{}_{20}C_9} &= \frac{15!}{4!11!} \cdot \frac{9!11!}{20!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} \\ &= \frac{3 \cdot 7}{19 \cdot 17 \cdot 8}\end{aligned}$$

である。その他の色の場合も同様の確率であるから、得点の期待値は,

$$\begin{aligned}E &= \frac{3 \cdot 7}{19 \cdot 17 \cdot 8} \cdot (900 + 2020 + 4000 + 6000) \\ &= 105\end{aligned}$$

と求まる。

(答) 105

底の条件より,

$$x > 0, x \neq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また,

$$3\log_x(7x) = 3(\log_x 7 + \log_x x) = \frac{3}{\log_7 x} + 3$$

となるので,

$$\log_7 x - 3\log_x(7x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \log_7 x - \frac{3}{\log_7 x} - 3 \leq -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と変形できる。ここで, $t = \log_7 x$ とおくと, ①の条件から,

[1] $t > 0$ すなわち $x > 1$ のとき,

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3$$

となる。ここで, $t > 0$ だから,

$$0 < t \leq 3$$

と求まる。

$$\log_7 x = 3 \Leftrightarrow x = 343$$

であるから,

$$1 < x \leq 343$$

となる。

[2] $t < 0$ すなわち $0 < x < 1$ のとき,

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t \leq -1, 3 \leq t$$

となる。ここで, $t < 0$ だから,

$$t \leq -1$$

と求まる。したがって $0 < x < 1$ に注意して,

$$0 < x \leq \frac{1}{7}$$

となる。

[1], [2]より, 求める x の範囲は,

$$0 < x \leq \frac{1}{7}, 1 < x \leq 343$$

と求まる。

(答) $0 < x \leq \frac{1}{7}, 1 < x \leq 343$

(1)

二項定理より,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n &= 1^n + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{2}{n} + \dots \\ &\geq 1 + n \cdot 1 \cdot \frac{2}{n} \\ &= 3\end{aligned}$$

となるので,

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \geq 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。(等号は $n=1$ のときに成立)

(証明終)

(2)

$$(n+1)^{n-1}(n+2)^n \geq 3^n (n!)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立することを数学的機能法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}(n+1)^{n-1}(n+2)^n &= 3 \\ 3^n (n!)^n &= 3\end{aligned}$$

より②は成立する。

[2] $n=k$ で②が成立すると仮定すると,

$$\begin{aligned}(k+1)^{k-1}(k+2)^k &\geq 3^k (k!)^2 \\ \Leftrightarrow (k+2)^k &\geq \frac{3^k (k!)^2}{(k+1)^{k-1}} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が仮定より成立する。ここで,

$$\begin{aligned}\{(k+1)+1\}^{(k+1)-1} \{(k+1)+2\}^{k+1} \\ = (k+2)^k (k+3)^{k+1}\end{aligned}$$

と変形でき、これに③を代入すると,

$$\begin{aligned}(k+2)^k (k+3)^{k+1} \\ &\geq \frac{3^k (k!)^2}{(k+1)^{k-1}} \cdot (k+3)^{k+1} \\ &= \frac{(k+3)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^{k+1} \{(k+1)!\}^2 \\ &= \left(1+\frac{2}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^{k+1} \cdot \{(k+1)!\}^2\end{aligned}$$

となる。ここで、①を用いると,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^{k+1} \cdot \{(k+1)!\}^2 \\ &\geq 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^{k+1} \cdot \{(k+1)!\}^2 \\ &= 3^{k+1} \{(k+1)!\}^2\end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ でも②は成立する。[1], [2]より、すべての自然数 n について②が成立する。

(証明終)

4

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + a + b$ とおくと,

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

となるので, $f(x)$ が 3 つの異なる実数解をもつには,

$$a \neq 0$$

が必要である。

[1] $a < 0$ のとき,

$f(x)$ の増減表は次の通りである。

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

このとき仮に $f(x)$ が 3 つの異なる実数解をもつとしても, 増減表より $f(x) = 0$ の解のうち 2 つが負となってしまうため不適である。

[2] $a > 0$ のとき,

$f(x)$ の増減表は次のとおりである。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって, 3 つの異なる実数解をもつ条件は,

$$\begin{cases} f(0) > 0 \Leftrightarrow a + b > 0 \Leftrightarrow b > -a \\ f(2a) < 0 \Leftrightarrow 8a^3 - 12a^3 + a + b < 0 \Leftrightarrow b < 4a^3 - a \end{cases}$$

となる。このとき, 3 つの解のうち 1 つだけが負となる。

[1], [2] より,

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > -a \\ b < 4a^3 - a \end{cases}$$

となればよい。ここで,

$$\begin{aligned} 4a^3 - a &= -a \\ \Leftrightarrow a^3 &= 0 \end{aligned}$$

なので, 直線 $b = -a$ と曲線 $b = 4a^3 - a$ は $a = 0$ で接する(3 重解)。よって, 領域を図示すると次図の斜線部のようにになる。ただし, 斜線部は含まない。

