

3 角形の 3 頂点を A, B, C とおき,

$$BC = a, CA = b, AB = c,$$

$$\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$$

とおく。 $a \geq b \geq c$ として一般性を失わない。またこのとき、 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ である。

条件(ii)より,

$$a + c = 2b \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, また条件(iii)より,

$$a + b + c = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。よって, ①を②に代入し,

$$b = 1$$

と求まる。

条件(ii)より, 公差を k ($0 \leq k < 1$) とおけば, $a = 1 + k, c = 1 - k$ とかけ, このとき,

$$\cos \alpha = \frac{1^2 + (1-k)^2 - (1+k)^2}{2 \cdot 1 \cdot (1-k)} = \frac{1-4k}{2(1-k)} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{1^2 + (1+k)^2 - (1-k)^2}{2 \cdot 1 \cdot (1+k)} = \frac{1+4k}{2(1+k)}$$

となる。また, 条件(i)より,

$$\alpha - \gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \gamma + \frac{\pi}{2}$$

となるので,

$$\cos \alpha = \cos \left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \gamma \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。すると, ③, ④を用いて,

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow (-\cos \alpha)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-4k)^2}{4(1-k)^2} + \frac{(1+4k)^2}{4(1+k)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-4k)^2(1+k)^2 + (1+4k)^2(1-k)^2 = 4(1+k)^2(1-k)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-4k^2-3k)^2 + (1-4k^2+3k)^2 = 4(1-k^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\{(1-4k^2)^2 + (3k)^2\} = 4(1-k^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 14k^4 + 5k^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7k^2 - 1)(2k^2 + 1) = 0$$

が得られるが, いま $0 \leq k < 1$ であったので,

$$k = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

と求まる。したがって, 求める 3 辺は,

$$1 - \frac{1}{\sqrt{7}}, 1, 1 + \frac{1}{\sqrt{7}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{7}}, 1, 1 + \frac{1}{\sqrt{7}}$$

(1)

二項定理より,

$$0 = \{1 + (-1)\}^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_n C_k$$

となる。

(証明終)

(2)

 $0 \leq k \leq n$ のとき,

$$(n+1) {}_n C_k = (n+1) \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!k!} = (k+1) \cdot \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = (k+1) {}_{n+1} C_{k+1}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)より,

$${}_n C_k = \frac{k+1}{n+1} {}_{n+1} C_{k+1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} {}_n C_k &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot (k+1) \cdot \frac{{}_{n+1} C_{k+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_{n+1} C_{k+1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、和の部分について、 $i = k+1$ とおくと,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_{n+1} C_{k+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} {}_{n+1} C_i \\ &= - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i {}_{n+1} C_i \\ &= - \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i {}_{n+1} C_i - (-1)^0 {}_{n+1} C_0 \right\} \end{aligned}$$

となり、(1)を用いると,

$$\begin{aligned} &= (-1)^0 {}_{n+1} C_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} {}_n C_k = \frac{1}{n+1}$$

が成り立つ。

(証明終)

$f(x) = x^3$ とおくと,

$$f'(x) = 3x^2$$

であるから, $(t, f(t))$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= 3t^2(x-t) + t^3 \\ &= 3t^2x - 2t^3 \end{aligned}$$

となる。この方程式が, $y = -\left(x - \frac{4}{9}\right)^2$ にも接するので, 2 式を連立して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} 3t^2x - 2t^3 &= -\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 3t^2x - 2t^3 &= -x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{16}{81} \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(3t^2 - \frac{8}{9}\right)x - 2t^3 + \frac{16}{81} &= 0 \end{aligned}$$

は重解を持つ。したがって, この判別式を D とすると, 求める条件は,

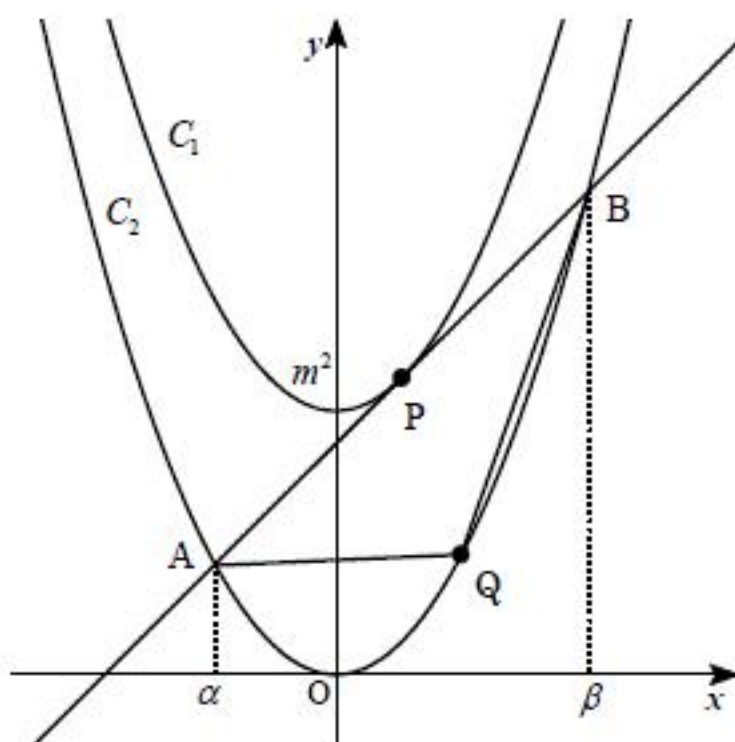
$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(3t^2 - \frac{8}{9}\right)^2 - 4\left(-2t^3 + \frac{16}{81}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9t^4 - \frac{16}{3}t^2 + \frac{64}{81} + 8t^3 - \frac{64}{81} &= 0 \\ \Leftrightarrow 9t^4 + 8t^3 - \frac{16}{3}t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 27t^4 + 24t^3 - 16t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2(27t^2 + 24t - 16) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2(9t - 4)(3t + 4) &= 0 \\ \therefore t = 0, \frac{4}{9}, -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

と求まる。以上より, 求める方程式は,

$$y = 0, y = \frac{16}{27}x - \frac{128}{729}, y = \frac{16}{3}x + \frac{128}{27}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 0, y = \frac{16}{27}x - \frac{128}{729}, y = \frac{16}{3}x + \frac{128}{27}$$



上図のように、点 $P(p, p^2 + m^2)$ 、点 $Q(q, q^2)$ とおく、初めに点 P を固定して考えると、

$$S = \text{直線 } AB \text{ と } C_2 \text{ で囲まれた面積} - \triangle ABQ$$

であり、直線 AB と C_2 で囲まれた面積は一定であるから、

$$「S \text{ が最小}」 \Leftrightarrow 「\triangle ABQ \text{ が最大}」$$

となる。このとき、辺 AB の長さは一定であるから、 $\triangle ABQ$ の面積は辺 AB を底辺と見たときの高さのみで決まる。高さが最大となるとき点 Q を接点とする C_2 の接線は、直線 AB と平行となる。

C_1 について、 $y' = 2x$ であるから、直線 AB の方程式は、

$$y = 2p(x - p) + p^2 + m^2 \Leftrightarrow y = 2px - p^2 + m^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、 C_2 についても、 $y' = 2x$ であるから、点 Q を通る接線の傾きは

$$2q$$

となる。したがって、平行であるとき、両者の傾きは等しく、

$$2p = 2q \quad \therefore p = q$$

と求まる。したがって、点 $Q(p, p^2)$ である。

また、 $A(\alpha, \alpha^2)$ 、 $B(\beta, \beta^2)$ 、 $(\alpha < \beta)$ とおくと、点 A と点 B は、 $\textcircled{1}$ と C_2 の方程式を連立して得

られる 2 次方程式

$$x^2 - 2px + p^2 - m^2 = 0$$

の 2 解であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 2p, \alpha\beta = p^2 - m^2$$

となる。よって、 $m > 0$ 、 $\alpha < \beta$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4p^2 - 4(p^2 - m^2) \\ &= 4m^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \beta - \alpha = 2m$$

と求まる。よって、直線 PQ が y 軸に平行であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \triangle ABQ &= \frac{1}{2} \cdot (\beta - \alpha) \cdot \{(p^2 + m^2) - p^2\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot m^2 \\ &= m^3 \end{aligned}$$

と求まる。また、直線 AB と C_2 で囲まれた面積を S' とおくと、

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(2px - p^2 + m^2) - x^2\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{4}{3}m^3 \end{aligned}$$

と求まる。 $S = S' - \triangle ABQ$ であるから、

$$S = \frac{4}{3}m^3 - m^3 = \frac{1}{3}m^3$$

と求まる。以上より、点 Q が C_2 上の A と B の間を動くとき、 S の最小値は点 P の取り方によ

らず、その値は $\frac{1}{3}m^3$ となる。

(証明終)

(答) $\frac{1}{3}m^3$