

1

$$y = x^3 - 3ax^2 - 3bx$$

$$y' = 3x^2 - 6ax - 3b$$

である。問の条件を満たすには、 $y' = 0$ が $x = p, q$ で成り立ち、かつ、 $-1 \leq p \leq 0, 1 \leq q \leq 2$ となることであるから、 $f(x) = 3x^2 - 6ax - 3b$ とすれば、

$$f(-1) \geq 0, f(0) \leq 0, f(1) \leq 0, f(2) \geq 0$$

が成り立つことが必要十分条件である。

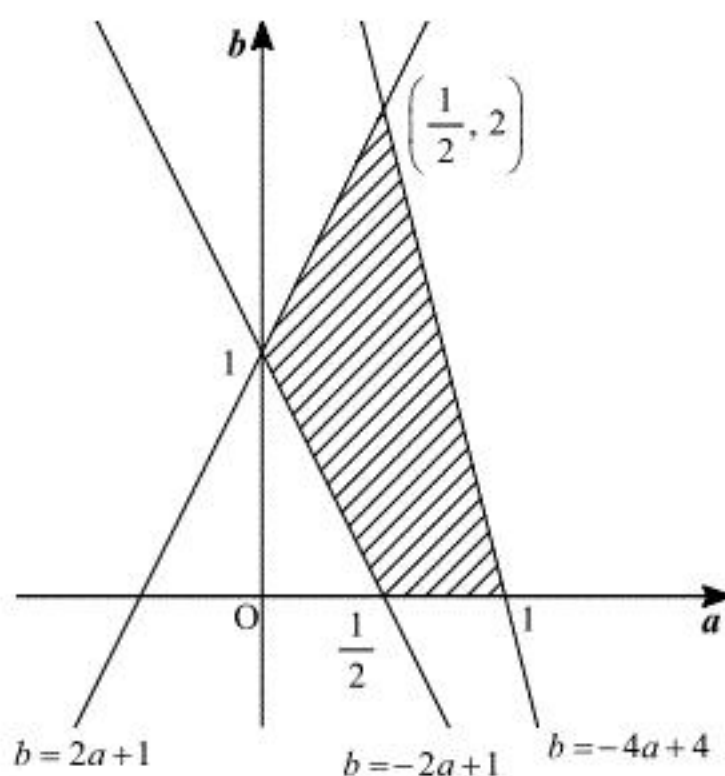
$$f(-1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow 3 + 6a - 3b \geq 0 \quad \Leftrightarrow b \leq 2a + 1$$

$$f(0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow -3b \leq 0 \quad \Leftrightarrow b \geq 0$$

$$f(1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow 3 - 6a - 3b \leq 0 \quad \Leftrightarrow b \geq -2a + 1$$

$$f(2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow 12 - 12a - 3b \geq 0 \quad \Leftrightarrow b \leq -4a + 4$$

より、これらを合わせた次図斜線部が求める領域となる。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(2)

$a + b = k$ とおくと、

$$\Leftrightarrow b = -a + k$$

と変形できる。したがって、上式の y 切片が最大るとき k は最大で、 y 切片が最少るとき k は最小となる。よって、(1)の図より、 $b = -a + k$ の傾きが -1 であることから、領域の端点を考え

れば、点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ を通るときに k は最大となる。このとき、

$$2 = -\frac{1}{2} + k$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

である。また、点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通る時、 k は最小となる。このとき、

$$0 = -\frac{1}{2} + k$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

である。

(答) 最大値: $\frac{5}{2}$, 最小値: $\frac{1}{2}$

$f(x) = e^{-\sqrt{3}x} \sin x$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x} \sin x + e^{-\sqrt{3}x} \cos x \\ &= e^{-\sqrt{3}x} (-\sqrt{3} \sin x + \cos x) \\ &= 2e^{-\sqrt{3}x} \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) \end{aligned}$$

となる。 $e^{-\sqrt{3}x} > 0$ より $f(x)$ の増減表は次の通りである。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{13}{6}\pi$	...	$\frac{19}{6}\pi$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	↗		↘		↗		↘		↗

したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ で極大、 $x = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi$ で極小となる。 $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) &= e^{-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)} \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)} \end{aligned}$$

であり、 $e^{-\sqrt{3}x}$ は $x \geq 0$ で単調減少するから、 $f(x)$ は、 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$ を撮ることがわかる。同様にして、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{6}\pi + 2n\pi\right) &= e^{-\sqrt{3}\left(\frac{7}{6}\pi + 2n\pi\right)} \sin\left(\frac{7}{6}\pi + 2n\pi\right) \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}\left(\frac{7}{6}\pi + 2n\pi\right)} \end{aligned}$$

であり、 $e^{-\sqrt{3}x}$ は $x \geq 0$ で単調減少するから、 $f(x)$ は、 $x = \frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi}$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \text{最大値: } x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき} & \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi} \\ \text{最小値: } x = \frac{7}{6}\pi \text{ のとき} & -\frac{1}{2}e^{-\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi} \end{cases}$$

3

$y = x^2 - x$ 上に点 $P(x', y')$ をとり、原点を中心に点 P を -45° 回転させた点を $Q(X, Y)$ とおくと、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X - Y \\ X + Y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

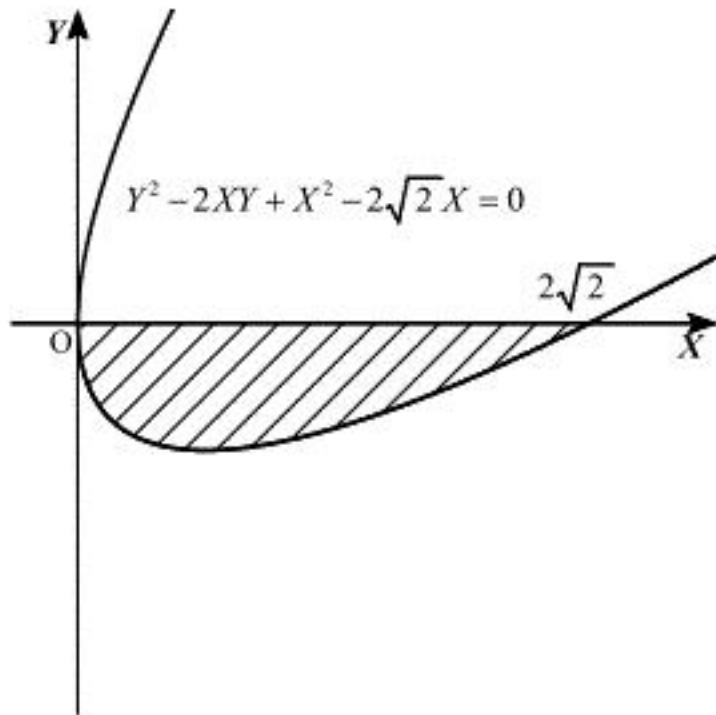
となる。これを $y' = (x')^2 - x'$ に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) &= \frac{1}{2}(X - Y)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ \Leftrightarrow (X - Y)^2 &= 2\sqrt{2}X \\ \therefore Y &= X \pm \sqrt{2\sqrt{2}X} \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と求まる。上式より $X \geq 0$ であり、したがって、 $Y = X + \sqrt{2\sqrt{2}X}$ は $X = 0$ でのみ X 軸と交わる。また、 $Y = X - \sqrt{2\sqrt{2}X}$ と X 軸との交点は、

$$\begin{aligned}X - \sqrt{2\sqrt{2}X} &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= \sqrt{2\sqrt{2}X} \\ \Leftrightarrow X^2 &= 2\sqrt{2}X \quad \text{かつ } X \geq 0 \\ \therefore X &= 0, 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。①は、 $y = x^2 - x$ を原点中心に -45° 回転させたものであるから、求める体積は下記の斜線部を x 軸を中心に 1 回転して得られる回転体の体積である。



$$X + \sqrt{2\sqrt{2}X} \geq 0$$

であるから、上図の斜線部は、 $Y = X - \sqrt{2\sqrt{2}X}$ と $Y = 0$ に囲まれた部分である。したがって、求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(-X + \sqrt{2\sqrt{2}X} \right)^2 dX \\ &= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(X^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2\sqrt{2}}X\sqrt{X} \right) dX \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}X^3 + \sqrt{2}X^2 - \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{2\sqrt{2}}X^2\sqrt{X} \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \pi \cdot \left(\frac{16}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - \frac{64}{5}\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$

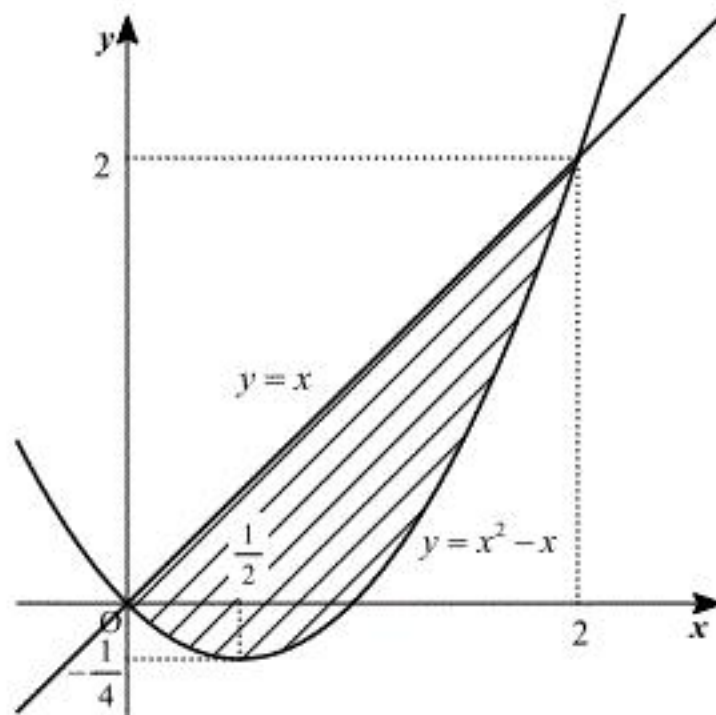
[別解]

$$\begin{cases} y = x^2 - x = x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ y = x \end{cases}$$

の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned}x^2 - x &= x \\ x(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2\end{aligned}$$

である。したがって、下図の斜線部を $y = x$ を軸にして回転させればよい。



また、 $f(x) = x^2 - x$ とおくと、

$$f'(x) = 2x - 1$$

であるから、 $x \geq 0$ のとき、

$$f'(x) \geq -1$$

となる。したがってグラフより、 $y = x$ 上に点 $R(t, t)$ ($0 \leq t \leq 2$) をとったとき、この点を通り $y = x$ に垂直な直線と、 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$) は 1 点で交わる。この交点を S とおき、 t を用いて表すと、

$$\begin{cases} y = -(x-t) + t = -x + 2t \\ y = x^2 - x \end{cases}$$

の交点だから、

$$x^2 - x = -x + 2t \quad \therefore x = \sqrt{2t} \quad (\because 0 \leq t \leq 2)$$

$$S(\sqrt{2t}, -\sqrt{2t} + 2t)$$

となる。点 R と点 S の距離を l_t とおくと、

$$l_t = \sqrt{(t - \sqrt{2t})^2 + \{t - (-\sqrt{2t} + 2t)\}^2} = \sqrt{2}(\sqrt{2t} - t) \quad (\because 0 \leq t \leq 2)$$

と求まる。ここで、原点と点 R の距離を r とおくと、

$$r = \sqrt{2t} \Leftrightarrow t = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad (0 \leq r \leq 2\sqrt{2})$$

であるから、これを l_t に代入すると、

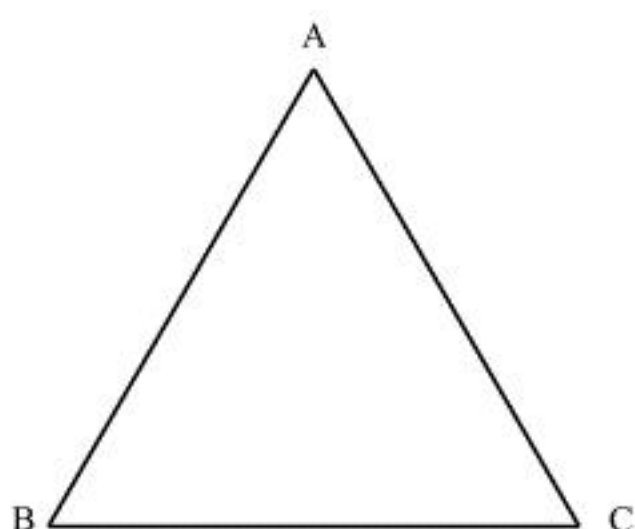
$$l_r = \sqrt{2} \left(\sqrt{\sqrt{2} \cdot r} - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2\sqrt{2} \cdot r} - r$$

となるので、求める体積を V とすると、

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{2\sqrt{2}r} - r \right)^2 dr = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

と求まる。

(答) $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$



(1)

条件より、 $n \geq 1$ に対して、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}a_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。これと $(a_1, b_1, c_1) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ より、

$$(a_2, b_2, c_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$(a_3, b_3, c_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$$

$$(a_4, b_4, c_4) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} (a_2, b_2, c_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ (a_3, b_3, c_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \\ (a_4, b_4, c_4) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}\right) \end{cases}$$

(2)(i)(ii)(iii)

①, ②, ③より、 $n \geq 1$ において

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}a_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \text{(i)} & a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \text{(ii)} & b_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}a_n \\ \text{(iii)} & c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases}$$

(3)

 $b_n = c_n$ であることを数学的帰納法によって示す。[1] $n=1$ のとき、

$$b_1 = c_1 = \frac{1}{2} \text{ より成立する。}$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき、

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \Leftrightarrow c_{k+1} - b_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - c_k) = 0$$

$$\therefore b_{k+1} = c_{k+1}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも成立する。[1], [2]より、すべての自然数 n で $b_n = c_n$ が成り立つ。

(証明終)

(4)

 $b_n = c_n$ を①に代入すると、

$$a_{n+1} = b_n \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。ここで、 $a_n + b_n + c_n = 1$ すなわち $b_n = \frac{1}{2}(1 - a_n)$ であるから、これを④に代入して、

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$