

1

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{9}{a+b+c} \\
 &= \frac{(a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{3abc + a^2c + a^2b + b^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2 - 9abc}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2 - 6abc}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{a(b^2 - 2bc + c^2) + b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2)}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2}{abc(a+b+c)} \\
 &\geq 0 \quad (\because a > 0, b > 0, c > 0)
 \end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

が示された。また、等号成立は、 $b=c$ かつ $a=c$ かつ $a=b$ のとき、すなわち $a=b=c$ のときである。

(証明終)

(答) $a=b=c$

k 回表が出続けて $k+1$ 回目に裏が出る確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

である。また, n 回表が出続けて終了する確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。したがって, 得点の期待値を E_n とすると,

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot 3^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 3^n \\ &= \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\} + \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ &= 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}$$

3

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 2a \sin x - a + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - 2a \sin x - a + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x + 2a \sin x + a - 4 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形できる。ここで $t = \sin x$ とおくと、 $0 \leq x < 2\pi$ であるから、

$$-1 \leq t \leq 1$$

である。また、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow t^2 + 2at + a - 4 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

と書ける。

[1] $\textcircled{2}$ 式が $t=1$ を解にもつとき、

$\textcircled{2}$ 式に $t=1$ を代入して、

$$\begin{aligned}1 + 2a + a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a &= 3 \\ \therefore a &= 1\end{aligned}$$

となるので、このとき、 $\textcircled{2}$ 式は、

$$\begin{aligned}t^2 + 2t - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+3)(t-1) &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。 $-1 \leq t \leq 1$ より、 $a=1$ のときは $t=1$ のみを解にもつ。このとき、

$$\sin x = t = 1$$

であるから、 $0 \leq x < 2\pi$ より、

$$x = \frac{\pi}{2}$$

と求まり、 $a=1$ のときの $\textcircled{1}$ 式の解の個数は 1 個である。

[2] $\textcircled{2}$ 式が $t=-1$ を解にもつとき、

$\textcircled{2}$ 式に $t=-1$ を代入して、

$$\begin{aligned}1 - 2a + a - 4 &= 0 \\ \therefore a &= -3\end{aligned}$$

となるので、このとき、 $\textcircled{2}$ 式は、

$$\begin{aligned}t^2 - 6t - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-7) &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。 $-1 \leq t \leq 1$ より、 $a=-3$ のときは $t=-1$ のみを解にもつ。このとき、

$$\sin x = t = -1$$

であるから、 $0 \leq x < 2\pi$ より、

$$x = \frac{3}{2}\pi$$

と求まり、 $a=-3$ のときの $\textcircled{1}$ 式の解の個数は 1 個である。

[3] $\textcircled{2}$ 式が $t \neq -1, 1$ の解をもつとき、

このとき、

$$a \neq -3, 1$$

である。 $\textcircled{2}$ 式が $-1 < t < 1$ に解を 2 つもつ条件は、

$$\begin{cases} \text{軸: } t = -a \text{ が } -1 < t < 1 \text{ に存在する} \\ \text{判別式: } D > 0 \\ f(-1) > 0 \quad \text{かつ} \quad f(1) > 0 \end{cases}$$

のすべてを満たすことである。これを解くと、

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & \begin{cases} -1 < a < 1 \\ \frac{D}{4} = a^2 - a + 4 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \\ f(1) = 1 + 2a + a - 4 = 3a - 3 > 0 \\ f(-1) = 1 - 2a + a - 4 = -a - 3 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -1 < a < 1 \\ a > 1 \\ a < -3 \end{cases}\end{aligned}$$

となるので、条件を満たす a は存在しない。次に $\textcircled{2}$ 式が $-1 < t < 1$ に解を 1 つだけ持つ場合を考える。このようになる条件は、

$$\frac{D}{4} > 0$$

に注意すると、

$$f(-1) \cdot f(1) < 0$$

である。これを解くと、

$$\begin{aligned}(3a-3)(-a-3) &< 0 \\ (a-1)(a+3) &> 0 \\ \therefore a &< -3, 1 < a\end{aligned}$$

と求まる。このとき $\textcircled{2}$ 式は $-1 < t < 1$ に解を 1 つだけもつから、1 つの t に対して x の解は 2 つあるので、 x の解は 2 つである。

[1], [2], [3] より、 $\textcircled{1}$ 式の解の個数は、

$$\begin{array}{ll} a < -3, 1 < a \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ a = -3, 1 \text{ のとき,} & 1 \text{ 個} \\ -3 < a < 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{array}$$

である。

(答) $a < -3, 1 < a$ のとき、2 個

$a = -3, 1$ のとき、1 個

$-3 < a < 1$ のとき 0 個

(1)

まず、曲線 $c: y = -ax^2 + b$ と曲線 $y = x^2$ の交点を求める。2 式を連立して、

$$\begin{aligned} -ax^2 + b &= x^2 \\ \Leftrightarrow (a+1)x^2 &= b \\ \therefore x &= \pm \sqrt{\frac{b}{a+1}} \end{aligned}$$

と求まる。 $f(x) = -ax^2 + b$, $g(x) = x^2$ とおくと、

$$f'(x) = -2ax, g'(x) = 2x$$

したがって、 $(t, f(t))$ における $y = f(x)$ の接線の傾きは、

$$f'(t) = -2at$$

であり、 $(t, g(t))$ における接線の傾きは、

$$g'(t) = 2t$$

である。ここで、 $t_1 = \sqrt{\frac{b}{a+1}}$, $t_2 = -\sqrt{\frac{b}{a+1}}$ とおくと、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は $x = t_1, t_2$ のとき

に交わる。したがって、これらの点での $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接線の傾きの積が -1 となればよいから、

$$\begin{aligned} -2at_1 \cdot 2t_1 &= -1 \\ \Leftrightarrow -4at_1^2 &= -1 \\ \Leftrightarrow 4a \left(\sqrt{\frac{b}{a+1}} \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4a \cdot \frac{b}{a+1} &= 1 \\ \therefore b &= \frac{a+1}{4a} \end{aligned}$$

と求まる。同様にすると、 $x = t_2$ で各々の接線が直交するときも上式が成り立つ。したがって、

$$b = \frac{a+1}{4a}$$

のときに曲線 C と $y = x^2$ は直交する。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{a+1}{4a}$$

(2)

(1)より、

$$C: y = -ax^2 + \frac{a+1}{4a}$$

である。まず、曲線 C と $y = cx^2 + d$ の交点を求める。2 式を連立して、

$$\begin{aligned} -ax^2 + \frac{a+1}{4a} &= cx^2 + d \\ (a+c)x^2 &= \frac{a+1}{4a} - d \\ x &= \pm \left(\frac{a+1-4ad}{4a(a+c)} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

と求まる。

$$h(x) = cx^2 + d, t_1 = \left(\frac{a+1-4ad}{4a(a+c)} \right)^{\frac{1}{2}}, t_2 = -\left(\frac{a+1-4ad}{4a(a+c)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく。 $y = f(x)$ と $y = h(x)$ は $x = t_1$ で交わるから、この点での $y = f(x)$ と $y = h(x)$ の接線の傾きは、それぞれ、

$$f'(t_1) = -2at_1, g(t_1) = 2ct_1$$

と表せ、これらの積が -1 になればよい。したがって、

$$\begin{aligned} -2at_1 \cdot 2ct_1 &= -1 \\ \Leftrightarrow -4ac \frac{a+1-4ad}{4a(a+c)} &= -1 \\ \Leftrightarrow c(a+1-4ad) &= a+c \\ \Leftrightarrow ac+c-4acd &= a+c \\ \Leftrightarrow ac-4acd &= a \\ \Leftrightarrow c-4cd &= 1 \\ \Leftrightarrow 4cd &= c-1 \\ \therefore d &= \frac{c-1}{4c} \end{aligned}$$

と求まる。同様にすると、 $x = t_2$ で各々の接線が直交するときも上式が成り立つ。したがって、

$$d = \frac{c-1}{4c}$$

のときに曲線 C と曲線 $y = cx^2 + d$ が直交する。

$$(\text{答}) \quad d = \frac{c-1}{4c}$$