

1

$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると、

$$D=b^2-4ac \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる確率を求めればよい。 b の値で場合分けをして考える。

[1] $b=1$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 1-4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ac \leq \frac{1}{4}$$

である。 a, c はともに1以上6以下の自然数であるから、上式を満たすような a, c は存在しない。

[2] $b=2$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2^2-4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ac \leq 1$$

である。 a, c はともに1以上6以下の自然数であるから、上式を満たすような a, c は、

$$(a, c) = (1, 1)$$

のみである。

[3] $b=3$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 3^2-4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ac \leq \frac{9}{4}$$

である。 a, c はともに1以上6以下の自然数であるから、上式を満たすような a, c は、

$$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$$

の3通りである。

[4] $b=4$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 4^2-4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ac \leq 4$$

である。 a, c はともに1以上6以下の自然数であるから、上式を満たすような a, c は、

$$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)$$

の8通りである。

[5] $b=5$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 5^2-4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ac \leq \frac{25}{4}$$

である。 a, c はともに1以上6以下の自然数であるから、上式を満たすような a, c は、

$$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), \\ (5, 1), (6, 1)$$

の14通りである。

[6] $b=6$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 6^2-4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ac \leq 9$$

である。 a, c はともに1以上6以下の自然数であるから、上式を満たすような a, c は、

$$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), \\ (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)$$

の17通りである。

[1]~[6]より、 $\textcircled{1}$ 式を満たす (a, b, c) の個数は

$$1+3+8+14+17=43 \text{ [通り]}$$

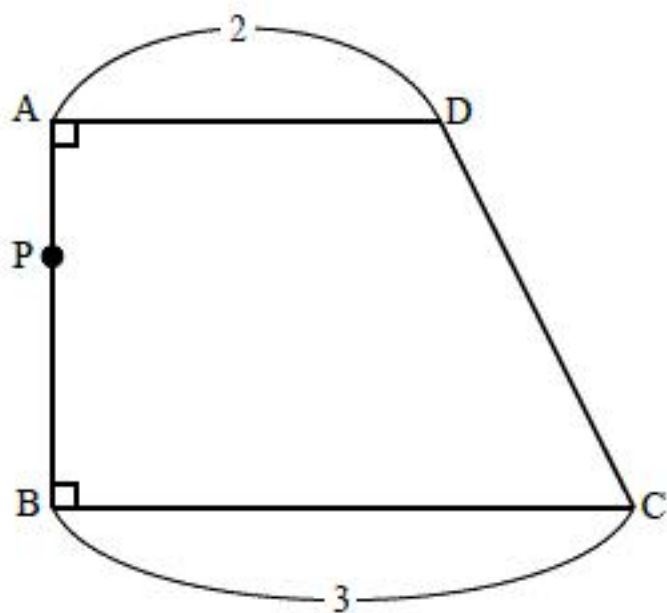
である。以上より、求める確率は、

$$\frac{43}{6^3} = \frac{43}{216}$$

となる。

(答) $\frac{43}{216}$

2



$AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$ であるから,

$$\angle BAD = 90^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

であることが分かる。また, 実数 k を用いて,

$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AB}$$

と表せる。

$$\overrightarrow{BP} = -(1-k) \overrightarrow{AB}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} \\ &= (1-k) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -k \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

と表せる。また, $AD \parallel BC$ であるから,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} + 4 \overrightarrow{PD} &= (1-k) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 4(-k \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= (1-5k) \overrightarrow{AB} + \frac{11}{3} \overrightarrow{BC} \quad \left(\because \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \right) \end{aligned}$$

と表せる。①より,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PC} + 4 \overrightarrow{PD}| &= \sqrt{(1-5k)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{121}{9} |\overrightarrow{BC}|^2} \\ &= \sqrt{(1-5k)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 121} \end{aligned}$$

となる。したがって, $|\overrightarrow{PC} + 4 \overrightarrow{PD}|$ が最小となるのは,

$$k = \frac{1}{5}$$

であり, このときの $|\overrightarrow{PC} + 4 \overrightarrow{PD}|$ の最小値は 11 である。このとき,

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{5} |\overrightarrow{AB}|$$

であるから, $|\overrightarrow{PC} + 4 \overrightarrow{PD}|$ が最小となるとき,

$$\frac{AP}{AB} = \frac{\frac{1}{5} |\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{5}$$

と求まる。

(答) $|\overrightarrow{PC} + 4 \overrightarrow{PD}|$ の最小値: 11 $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{5}$

3

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax(x-b)^2 \\
 &= a(x^3 - 2bx^2 + b^2x)
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= a(3x^2 - 4bx + b^2) \\
 &= a(3x - b)(x - b)
 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{b}{3}, b
 \end{aligned}$$

である。したがって、 $a > 0, b > 0$ であるから $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	0	...	$\frac{b}{3}$	...	b	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	0	↗		↘		↗

$0 < x < 4$ において極大値をとるための条件は、上の増減表より、

$$\begin{aligned}
 0 &< \frac{b}{3} < 4 \\
 \therefore 0 &< b < 12
 \end{aligned}$$

である。また、その極大値は2であり、 $f(4) = 27$ であるから、上の増減表より、

$$0 < b < 4$$

である必要がある。 $0 < b < 4$ のとき、 $x = \frac{b}{3}$ で極大となるから、

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{b}{3}\right) &= a \cdot \frac{b}{3} \left(\frac{b}{3} - b\right)^2 = 2 \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{27}ab^3 &= 2 \\
 \therefore a &= \frac{27}{4} \frac{1}{b^3}
 \end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}
 f(4) &= 27 \\
 \Leftrightarrow 4a(4-b)^2 &= 27 \\
 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{27}{4} \frac{1}{b^3} (4-b)^2 &= 27 \left(\because a = \frac{27}{4} \frac{1}{b^3} \right) \\
 \Leftrightarrow 2(4-b)^2 &= b^3 \quad (\because b > 0) \\
 \Leftrightarrow b^3 - 2b^2 + 16b - 32 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (b-2)(b^2 + 16) &= 0 \\
 \therefore b &= 2 \\
 \therefore (a, b) &= \left(\frac{27}{16}, 2 \right)
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(\frac{27}{16}, 2 \right)$$

4

(1)

条件より,

$$L': y = -\frac{1}{p}x$$

である。 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ とおくと,

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから, $y = f(x)$ の $(t, f(t))$ における接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= (2at + b)(x - t) + at^2 + bt + 1 \\ &= (2at + b)x - at^2 + 1 \end{aligned}$$

と表せる。これが原点を通るとき,

$$-at^2 + 1 = 0$$

$$\therefore t = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \dots\dots ①$$

となる。このとき, $y = f(x)$ の $(t, f(t))$ における接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= \left\{ 2a \left(\pm \frac{1}{\sqrt{a}} \right) + b \right\} x \\ &= (\pm 2\sqrt{a} + b)x \end{aligned}$$

と表せる。よって, $p = -2\sqrt{a} + b$ のときと $p = 2\sqrt{a} + b$ のときに場合分けをして考える。

[1] $p = -2\sqrt{a} + b \dots\dots ②$ のとき,

$$2\sqrt{a} + b = -\frac{1}{p} \quad \dots\dots ③$$

であるから,

$$② + ③ \Leftrightarrow 2b = p - \frac{1}{p}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right)$$

と求まる。これを②に代入して,

$$-2\sqrt{a} + \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) = p$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)$$

となるが, $a > 0, p > 0$ であるから, 左辺が負, 右辺が正となるので矛盾する。したがって不適である。

[2] $p = 2\sqrt{a} + b \dots\dots ④$ のとき,

$$-2\sqrt{a} + b = -\frac{1}{p} \quad \dots\dots ⑤$$

であるから,

$$④ + ⑤ \Leftrightarrow 2b = p - \frac{1}{p}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right)$$

と求まる。これを④に代入して,

$$2\sqrt{a} + \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) = p$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{4} \left(p + \frac{1}{p} \right) \quad \dots\dots ⑥$$

$$\therefore a = \frac{1}{16} \left(p + \frac{1}{p} \right)^2$$

と求まる。

[1], [2]より,

$$(a, b) = \left(\frac{1}{16} \left(p + \frac{1}{p} \right)^2, \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(\frac{1}{16} \left(p + \frac{1}{p} \right)^2, \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) \right)$$

(2)

(1)より曲線 C の原点を通る接線の接点の x 座標は,

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$$

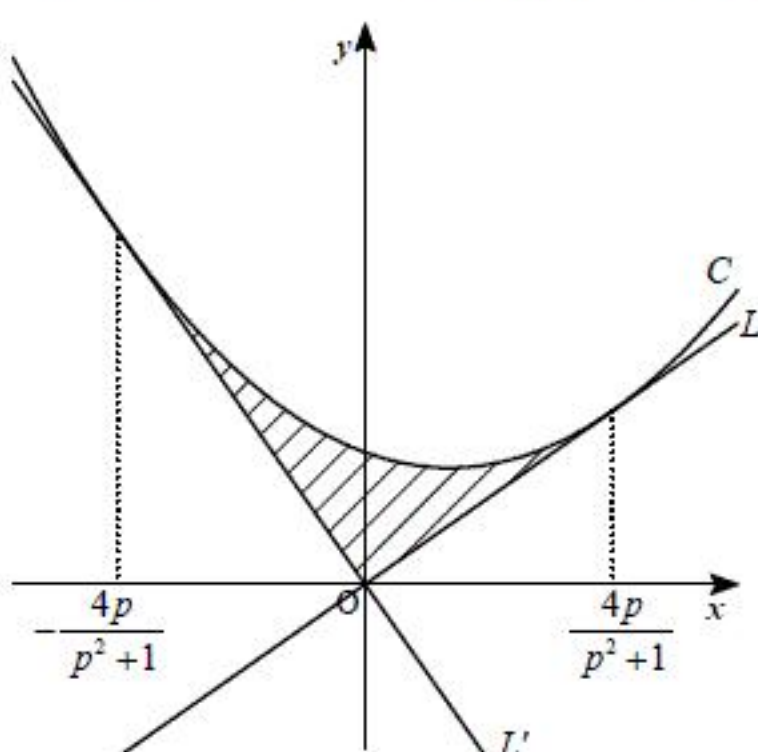
であるから,

$$\sqrt{a} = \frac{1}{4} \left(p + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{4} \frac{p^2 + 1}{p} \quad (\because a > 0)$$

より,

$$x = \pm \frac{4p}{p^2 + 1}$$

である。原点を通る接線は L, L' であるから, 今求めた接点は放物線 C と直線 L, L' との交点である。放物線 C は下に凸であるから, 放物線 C と直線 L は x 座標が正の部分で, 放物線 C と直線 L' は負の部分で接する。したがって, 求める面積は下図の斜線部である。



求める面積を S_p , $\frac{4p}{p^2+1} = P$ とすると,

$$\begin{aligned} S_p &= \int_{-P}^0 \left\{ (ax^2 + bx + 1) - \left(-\frac{1}{p}x \right) \right\} dx + \int_0^P \left\{ (ax^2 + bx + 1) - px \right\} dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{p} \right) x^2 + x \right]_{-P}^0 + \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{1}{2} (b - p)x^2 + x \right]_0^P \\ &= \left\{ \frac{a}{3}P^3 - \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{p} \right) P^2 + P \right\} + \left\{ \frac{a}{3}P^3 + \frac{1}{2} (b - p)P^2 + P \right\} \\ &= \frac{2}{3}aP^3 - \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) P^2 + 2P \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} \left(p + \frac{1}{p} \right)^2 \cdot \left(\frac{4p}{p^2+1} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \cdot \left(\frac{4p}{p^2+1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{4p}{p^2+1} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{p^2+1}{p} \right)^2 \cdot \left(\frac{p}{p^2+1} \right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{p^2+1}{p} \right) \cdot \left(\frac{p}{p^2+1} \right)^2 + 8 \cdot \frac{p}{p^2+1} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{p^2+1} - 8 \cdot \frac{p}{p^2+1} + 8 \cdot \frac{p}{p^2+1} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{p^2+1} \end{aligned}$$

と求まる。ここで $p = 2$ を用いると

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

となる。

(答) $\frac{16}{15}$