

(1)

数字の出方の全事象は、各コインが表が出るか裏が出るかを考えると、 $2^4=16$ 通りである。表が出た数字が1と3のみであるとき、(1,3)のように表すとする。このとき $S=1$ となるのは(1)の場合であり、 $S=2$ となるのは(2)の場合、 $S=3$ となるのは(1,2),(3)のいずれかの場合、 $S=4$ となるのは(1,3),(4)のいずれかの場合、 $S=5$ となるのは(2,3),(1,4)のいずれかの場合である。よって求める確率は

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

(1)と同様にして S の値と、 S がその値をとり得る確率 $P(S)$ の関係を考えて下表のようになる。

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(S)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

したがって求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{16}(0+1+2+6+8+10+12+14+8+9+10) \\ &= \frac{80}{16} \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(答) 5

(3)

2と4が書かれたコインの裏表は T の値に影響しないので、1と3が書かれたコインのみを投げると考えればよい。このとき数字の和 T と、 T がその値になる確率 $P(T)$ は下表のようになる。

T	0	1	3	4
$P(T)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

よって求める期待値を E' とすると

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{4}(0+1+3+4) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(1)

与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (\sin t - 2)^2 - 4(\sin 2t - \sin t) \\ &= \sin^2 t - 4\sin t + 4 - 4\sin 2t + 4\sin t \\ &= \sin^2 t + 4(1 - \sin 2t) \end{aligned}$$

となる。各項は負でないので

$$D \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、等号成立は

$$\sin^2 t = 0 \text{ かつ } 1 - \sin 2t = 0$$

となるときである。 $\sin^2 t = 0$ すなわち $\sin t = 0$ が成り立つとき

$$\begin{aligned} 1 - \sin 2t &= 1 - 2\sin t \cos t \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので $1 - \sin 2t = 0$ は成り立たない。したがって①の等号が成立することは無いので

$$D > 0$$

となる。したがって、すべての t に対して与えられた方程式は相異なる 2 つの実数解をもつ。

(証明終)

(2)

与えられた方程式の左辺を $f(x)$ と置く。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + (\sin t - 2)x + \sin 2t - \sin t \\ &= \left(x - \frac{2 - \sin t}{2}\right)^2 + \frac{(2 - \sin t)^2}{4} + \sin 2t - \sin t \end{aligned}$$

より、 $y = f(x)$ は下に凸の放物線であり、軸の方程式は $x = \frac{2 - \sin t}{2}$ であることから、方程式

$f(x) = 0$ が 2 つの正の実数解を持つための条件は、

$$f(0) > 0 \text{ かつ } \frac{2 - \sin t}{2} > 0$$

である。ここで $-1 \leq \sin t \leq 1$ より、任意の $0 \leq t < 2\pi$ を満たす t で不等式 $\frac{2 - \sin t}{2} > 0$ が成り立

つ。一方、不等式 $f(0) > 0$ を同値変形すると、

$$\begin{aligned} f(0) &> 0 \\ \Leftrightarrow \sin 2t - \sin t &> 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin t \left(\cos t - \frac{1}{2}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \sin t > 0 \text{ かつ } \cos t > \frac{1}{2}, \text{ または } \sin t < 0 \text{ かつ } \cos t < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq t < 2\pi$ のもとで各不等式を解くと

$$\begin{aligned} \sin t > 0 \text{ かつ } \cos t > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 0 < t < \pi \text{ かつ } (0 \leq t < \frac{\pi}{3} \text{ または } \frac{5}{3}\pi < t < 2\pi) \\ \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sin t < 0 \text{ かつ } \cos t < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \pi < t < 2\pi \text{ かつ } \frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \pi < t < \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(0) &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3}, \pi < t < \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。これが求める t の範囲である。

(答) $0 < t < \frac{\pi}{3}, \pi < t < \frac{5\pi}{3}$

与えられた等式の右辺を通分すると

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} &= \frac{ax(x+1) + b(x-1)(x+1) + cx(x-1)}{(x-1)x(x+1)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (a-c)x - b}{x^3 - x}\end{aligned}$$

となる。これを与えられた等式に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3 - x} &= \frac{(a+b+c)x^2 + (a-c)x - b}{x^3 - x} \\ \therefore 1 &= (a+b+c)x^2 + (a-c)x - b\end{aligned}$$

となる。したがって両辺の係数を比較すると

$$\begin{aligned}a+b+c &= 0 \\ a-c &= 0 \\ -b &= 1\end{aligned}$$

となる。これより

$$a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$$

となる。すなわち

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} \right\}$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{100} \frac{1}{n^3 - n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{100} \left\{ \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{2}{2} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{1}{99} + \frac{1}{101} - \frac{2}{100} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{101} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{5049}{20200}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=2}^{100} \frac{1}{n^3 - n} = \frac{5049}{20200}$$

(1)

$y = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{8}{9}$ とすると $y' = -\frac{1}{8}x$ である。よって点 P における放物線 C_1 の接線の傾きは $-\frac{t}{8}$

である。よって法線 L の傾きは $\frac{8}{t}$ である。したがって法線 L は点 P $\left(t, -\frac{1}{16}t^2 - \frac{8}{9}\right)$ を通る傾

き $\frac{8}{t}$ の直線であるのでその方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{8}{t}(x-t) - \frac{1}{16}t^2 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{8}{t}x - \frac{1}{16}t^2 - \frac{80}{9} \end{aligned}$$

となる。法線 L と放物線 $y = x^2$ の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{8}{t}x - \frac{1}{16}t^2 - \frac{80}{9} \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{t}x + \frac{1}{16}t^2 + \frac{80}{9} &= 0 \end{aligned}$$

となる。法線 L と放物線 $y = x^2$ が接するための条件はこの x の 2 次方程式が重解を持つことである。判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \frac{16}{t^2} - \frac{t^2}{16} - \frac{80}{9}$$

であるので、求める条件は $t > 0$ より

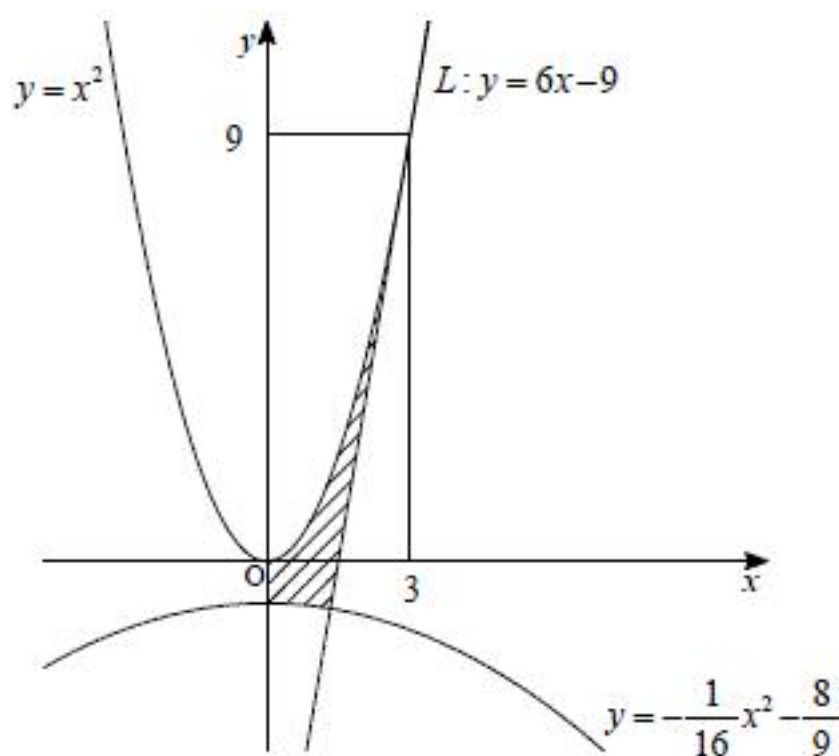
$$\begin{aligned} \frac{16}{t^2} - \frac{t^2}{16} - \frac{80}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{t^4}{16} + \frac{80}{9}t^2 - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9t^4 + 1280t^2 - 2304 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 + 144)(9t^2 - 16) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $t = \frac{4}{3}$

(2)

求めるのは下図斜線部の領域の面積である。



よって求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(x^2 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{8}{9} \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{17}{16}x^2 + \frac{8}{9} \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 (x-3)^2 dx \\ &= \left[\frac{17}{48}x^3 + \frac{8}{9}x \right]_0^4 + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^4 \\ &= \frac{164}{81} + \frac{125}{81} \\ &= \frac{289}{81} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{289}{81}$