

1

a と b の最大公約数を k とおくと、 a' 、 b' を互いに素な整数とおいて、

$$a = a'k$$

$$b = b'k$$

と表すことが出来る。このとき直線 OP の方程式は $y = \frac{b}{a}x$ と表せて、 $x = a'$ を代入すると、

$$y = \frac{b}{a}a' = \frac{b'}{a'}a' = b'$$

であるから、点 (a', b') は直線 OP 上の点であり、格子点である。

同様にして、点 $(2a', 2b')$ 、 $(3a', 3b')$ 、 $\dots$ 、 $((k-1)a', (k-1)b')$ も直線 OP 上の点であり、格子点である。

また、 O と (a', b') の間(端点を除く)に格子点 (a'', b'') が存在するとすれば、直線 OP 上にあることから

$$y = \frac{b}{a}x \text{ に } (a'', b'') \text{ を代入して整理し、}$$

$$a'b'' = a''b'$$

を満たす。ここで、 a' と b' が互いに素であることから、 a'' 、 b'' はそれぞれ a' 、 b' を約数に含まなくてはならないから、 $a'' = ma'$ 、 $b'' = mb'$ となる自然数 m があるが、これは、 $0 < a'' < a'$ に矛盾する。したがって、上記以外の格子点は直線 OP 上には存在しない。

よって

$$n(P) = k - 1$$

と表せる。いま、 $n(P) = 4$ であるから $k = 5$ である。

$a = 5a'$ 、 $b = 5b'$ となり、 $1 \leq a \leq 30$ 、 $1 \leq b \leq 30$ であるから

$$1 \leq a' \leq 6, 1 \leq b' \leq 6$$

である。

互いに素な (a', b') の数が格子点の数になり、そのような (a', b') は

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$

$$(2, 1), (2, 3), (2, 5),$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5),$$

$$(4, 1), (4, 3), (4, 5),$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 5)$$

の 23 個である。

(1)

$\frac{1}{1-a_n}=c_n$ とおくと、 $c_1=\frac{1}{1-a_1}=1$ であり、与えられた漸化式は

$$c_{n+1}-c_n=2n+1$$

となる。よって $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (2i+1) \\ &= 1 + n(n-1) + n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

である。また、上の c_n で $n=1$ とすると $c_1=1$ であるからこれは $n=1$ でも成立する。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-a_n} &= n^2 \\ \Leftrightarrow a_n &= 1 - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$$

(2)

$$\begin{aligned} b_k &= \sqrt{\frac{k+1}{k}} (1 - \sqrt{a_{k+1}}) \\ &= \sqrt{\frac{k+1}{k}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{(k+1)^2}} \right) \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k(k+1)}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k+1}} \end{aligned}$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k+1}} \right) \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \right) + \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \right) + \cdots + \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

である。

また、 $-\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}$ は n に関して単調増加であるから

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right) \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

すなわち $\sum_{k=1}^n b_k < \sqrt{2} - 1$ が示された。

(1)

 $p=0$ のとき $f(x)=e^x-\left(1+\frac{1}{2}x\right)$ であるから $f'(x)=e^x-\frac{1}{2}$ である。 $x \geq 0$ のとき、 e^x は単調増加でかつ、 $f'(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$ だから $f'(x)>0$ となる。すなわち $f(x)$ は $x \geq 0$ で単調増加である。ここで、 $f(0)=1-1=0$ であるから、

$$f(x) \geq f(0)=0$$

である。

よって $x \geq 0$ のとき、 $f(x) \geq 0$ が示された。

(証明終)

(2)

 $f(0)=0$ であるから、 $x \geq 0$ のとき $f(x) \geq 0$ となるためには、 $f'(0) \geq 0$ が必要となる。 $f'(x)=e^x-px-\frac{1}{2}-p$ より、 $f'(0)=\frac{1}{2}-p$ であるから $\frac{1}{2}-p \geq 0$ 、すなわち、

$$p \leq \frac{1}{2}$$

が必要となる。以下 $p \leq \frac{1}{2}$ で考える。

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - px - \frac{1}{2} - p \\ &= e^x - \frac{1}{2} - p(x+1) \end{aligned}$$

であり、

ここで $p \leq \frac{1}{2}$ 、 $x \geq 0$ の範囲を考えると $x+1 > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \frac{1}{2} - p(x+1) \\ &\geq e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+1) \\ &= e^x - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$

となる。

よって(1)より、 $x \geq 0$ のとき、 $f'(x) \geq 0$ である。すなわち、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で単調増加である。 $f(0)=0$ であるから $f(x) \geq f(0)=0$ となる。すなわち、 $p \leq \frac{1}{2}$ では必ず $x \geq 0$ で $f(x)$ ≥ 0 となる。以上より $p \leq \frac{1}{2}$ が $x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ となるための必要十分条件である。(答) $p \leq \frac{1}{2}$

$f(x) = \int_x^{2x} (t \log t - t) dt$ の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x \log 2x - 2x) \cdot \frac{d}{dx}(2x) - (x \log x - x) \\ &= 4x \log 2x - x \log x - 3x \\ &= x(3 \log x + 4 \log 2 - 3) \end{aligned}$$

$x > 0$ で $f'(x) = 0$ となる解を求めると,

$$\begin{aligned} 3 \log x + 4 \log 2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= 1 - \frac{4}{3} \log 2 = \log \left(2^{-\frac{4}{3}} e \right) \\ \Leftrightarrow x &= 2^{-\frac{4}{3}} e \end{aligned}$$

となり, 増減表は, 以下のようになる。

x	0	...	$2^{-\frac{4}{3}} e$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(2^{-\frac{4}{3}} e\right)$	$\nearrow$

よって $f(x)$ は $x = 2^{-\frac{4}{3}} e$ で最小値を取る。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} (t \log t - t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \log t \right]_x^{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{2x} t dt - \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_x^{2x} \\ &= 2x^2 \log 2x - \frac{1}{2} x^2 \log x - \left[\frac{1}{4} t^2 \right]_x^{2x} - \frac{3}{2} x^2 \\ &= 2x^2 \log 2x - \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{9}{4} x^2 \\ &= \frac{3}{2} x^2 \log x + x^2 \left(2 \log 2 - \frac{9}{4} \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f\left(e \cdot 2^{-\frac{4}{3}}\right) &= \frac{3}{2} e^2 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \left(1 - \frac{4}{3} \log 2 \right) + e^2 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \left(2 \log 2 - \frac{9}{4} \right) \\ &= -3 \cdot 2^{-\frac{14}{3}} e^2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $-3 \cdot 2^{-\frac{14}{3}} e^2$