

試験開始の合図があるまでに、次の注意をよく読んで、間違いないように受験してください。

1. 試験開始の合図があるまで冊子を開かないでください。
2. この冊子には問題 2 ページ、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ) 2 枚と計算用紙がセットになっています。
3. 試験開始の合図があったら、問題のページ数を確認し、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ)と計算用紙をミシン目で折ってから冊子よりていねいに切り離し、すべての用紙に受験番号を記入してください。
4. 問題・解答用紙に落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所がある場合には申し出てください。
5. 解答の記入は黒鉛筆(シャープペンシル可)に限ります。
6. 文字ははっきり、ていねいに書いてください。
7. 計算・下書きには計算用紙を使ってください。
8. 解答用紙の点数欄には何も記入しないでください。
9. 複数の解答用紙がある場合、使用していない解答用紙は机の上に裏返しにしてください。
10. 試験終了の合図があったら、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ)のみ提出してください。計算用紙は提出しないでください。

1

平面上の点で、その座標が両方とも整数であるものを格子点と呼ぶ。

原点を O とし、 O 以外の格子点 P に対して、線分 OP 上にある O と P 以外の格子点の個数を $n(P)$ で表す。たとえば、点 $P(2, 3)$ については $n(P) = 0$ である。条件

$$1 \leq a \leq 30 \text{ かつ } 1 \leq b \leq 30 \text{ かつ } n(P) = 4$$

をみたす格子点 $P(a, b)$ の個数を求めよ。

(30 点)

2

関係式

$$a_1 = 0, \quad \frac{1}{1 - a_{n+1}} - \frac{1}{1 - a_n} = 2n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{a_n\}$ に対して、次の問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$b_k = \sqrt{\frac{k+1}{k}} (1 - \sqrt{a_{k+1}})$$

とおく。このとき、すべての n に対して、 $\sum_{k=1}^n b_k < \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ。

(40 点)

3 p を定数として、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^x - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)(1 + px)$$

と定める。

- (1) $p = 0$ のとき、 $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) 「 $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 0$ 」が成り立つような定数 p の取り得る値の範囲を求めよ。

(40 点)

4正の実数 x に対して

$$f(x) = \int_x^{2x} (t \log t - t) dt$$

とおく。 $f(x)$ の最小値と、最小値を与える x を求めよ。

(40 点)