

与えられた不等式の両辺に、 $x^2 > 0$  を掛けても不等号の向きが変わらないことに注意して、

$$\frac{x^2-1}{x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1) \leq x^2 \quad \text{かつ} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \leq 0 \quad \text{かつ} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \left( x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left( x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad x \neq 0$$

$$\therefore x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \\
 &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \\
 &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \\
 &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

より,

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

となり, 等号成立は

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

のときである。

(証明終)

(2)

(1)の不等式で,  $a, b, c$  として,  $a^2, b^2, c^2$  を代入すると,

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また, (1)の不等式の両辺を 2 乗して,

$$9(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a + b + c)^4 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。よって, ①, ②より,

$$\begin{aligned}
 27(a^4 + b^4 + c^4) &\geq 9(a^2 + b^2 + c^2)^2 \\
 &\geq (a + b + c)^4
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

より,

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{7}$$

である。

(答)  $\sqrt{7}$ 

(2)

$$\begin{aligned} (\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{b}) &= |\vec{c}|^2 + \vec{c} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 2 + \vec{c} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \end{aligned}$$

より,  $\vec{c}$  と  $\vec{a} + 2\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) とおくと,

$$\begin{aligned} (\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{b}) &= 2 + |\vec{c}| |\vec{a} + 2\vec{b}| \cos \theta \\ &= 2 + \sqrt{7} \cos \theta \end{aligned}$$

となるから, これが最大となるのは  $\theta = 0$ , すなわちある正の実数  $k$  を用いて

$$\vec{c} = k(\vec{a} + 2\vec{b})$$

となるときである。ここで,  $\vec{c}$  の長さが 1 であるから,

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= 1 \\ \Leftrightarrow |k(\vec{a} + 2\vec{b})| &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

となり,  $(\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{b})$  を最大にするベクトル  $\vec{c}$  は  $\frac{1}{\sqrt{7}}(\vec{a} + 2\vec{b})$  であり, このとき最大値  $2 + \sqrt{7}$  をとる。

(答)  $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{7}}(\vec{a} + 2\vec{b})$ , 最大値:  $2 + \sqrt{7}$

(1)

$D$  の方程式の 2 次の係数は 3, 頂点が  $(t, -t^2)$  であるから,  $D$  の方程式は,

$$y = 3(x-t)^2 - t^2 = 3x^2 - 6tx + 2t^2$$

となる。したがって,

$$b = -6t, c = 2t^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = -6t, c = 2t^2$$

(2)

曲線  $C$  について,  $y' = -2x$  であるから, 曲線  $C$  の点  $P(t, -t^2)$  における接線  $L$  の方程式は,

$$y = -2t(x-t) - t^2 \Leftrightarrow y = -2tx + t^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。(1)の結果より,  $D$  の方程式は,

$$y = 3x^2 - 6tx + 2t^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから, ①, ②式から  $y$  を消去して,  $L, D$  の交点の  $x$  座標は,

$$-2tx + t^2 = 3x^2 - 6tx + 2t^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4tx + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-t)(x-t) = 0$$

$$\therefore x = \frac{t}{3}, t$$

となる。これを①に代入して,  $L$  と  $D$  の交点は  $\left(\frac{t}{3}, \frac{t^2}{3}\right), (t, -t^2)$  と求まる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{t}{3}, \frac{t^2}{3}\right), (t, -t^2)$$

(3)

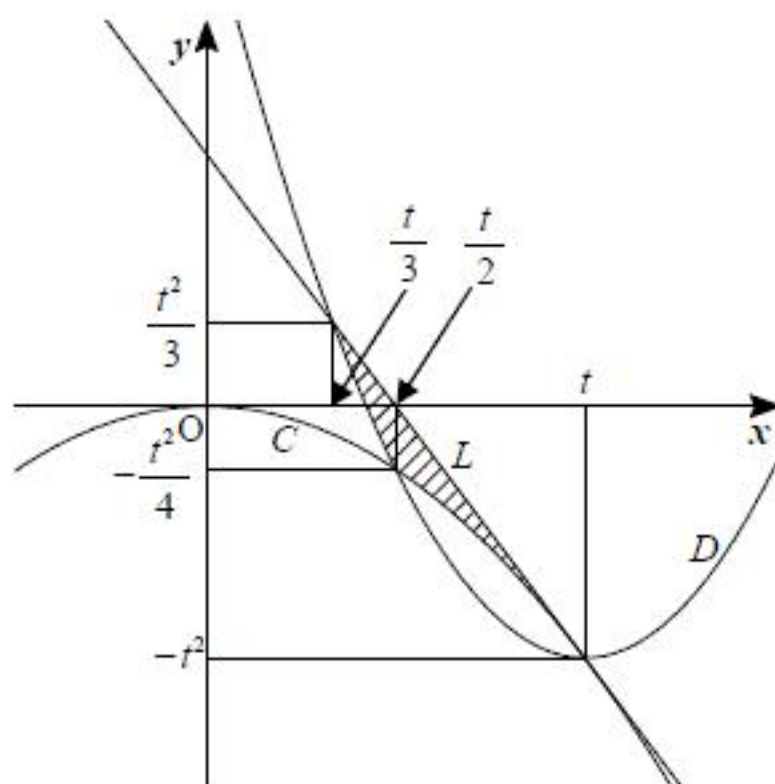
$C$  と  $D$  の交点の  $x$  座標は, 両式から,  $y$  を消去して,

$$-x^2 = 3x^2 - 6tx + 2t^2$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-t)(x-t) = 0$$

$$\therefore x = \frac{t}{2}, t$$

となる。したがって, 求める面積は, 下の図の斜線部となる。



よって求める面積は,

$$(\text{L と } D \text{ で囲まれた面積}) - (\text{C と } D \text{ で囲まれた面積})$$

$$= \int_{\frac{t}{3}}^t \{(-2tx + t^2) - (3x^2 - 6tx + 2t^2)\} dx - \int_{\frac{t}{2}}^t \{(-x^2) - (3x^2 - 6tx + 2t^2)\} dx$$

$$= -3 \int_{\frac{t}{3}}^t \left(x - \frac{t}{3}\right)(x-t) dx + 4 \int_{\frac{t}{2}}^t \left(x - \frac{t}{2}\right)(x-t) dx$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} \left(t - \frac{t}{3}\right)^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} \left(t - \frac{t}{2}\right)^3$$

$$= \frac{7}{108} t^3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{7}{108} t^3$$