

1

(1)

青い線分だけをたどってAからCに行くことができるのは

[1] C_1 が表となるとき

[2] C_1 が裏かつ C_2, C_3 が共に表となるとき

があり、これらは互いに排反である。よって、求める確率は

$$p + (1-p) \cdot p^2 = -p^3 + p^2 + p$$

となる。

$$(\text{答}) -p^3 + p^2 + p$$

(2)

青い線分だけをたどってAからFに行くことができるのは、AからCに行くことができ、かつ、CからDに行くことができ、かつ、DからFに行くことができる場合である。ここで、青い線分だけをたどってDからFに行くことが出来る確率は(1)で求めた確率と等しい。よって、求める確率は

$$(-p^3 + p^2 + p) \cdot p \cdot (-p^3 + p^2 + p) = p^3 (p^2 - p - 1)^2$$

となる。

$$(\text{答}) p^3 (p^2 - p - 1)^2$$

2 次方程式

$$x^2 + (\log_2 n)x + \log_3 n = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が実数解を持たない条件は、方程式①の判別式を D として

$$D < 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 n)^2 - 4\log_3 n < 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 n)^2 - 4\frac{\log_2 n}{\log_2 3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 n \left(\log_2 n - \frac{4}{\log_2 3} \right) < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 n が自然数であるとき、 $\log_2 n \geq 0$ であるから、②は

$$0 < \log_2 n < \frac{4}{\log_2 3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_2 n < \frac{4}{1.58}$$

$$0 < \log_2 n < 2.53\dots$$

となり、ここで

$$\log_2 5 = 2.32$$

$$\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 2.58$$

であることから、 n が自然数であることに注意して

$$1 < n \leq 5$$

$$\Leftrightarrow n = 2, 3, 4, 5$$

において方程式①は実数解を持たない。

(答) $n = 2, 3, 4, 5$

曲線 $y = x^3 - (3a+2)x^2 - 3a^2 - 4a + 4$ と放物線 $y = x^2$ の交点の x 座標について

$$\begin{aligned} x^3 - (3a+2)x^2 - 3a^2 - 4a + 4 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^3 - (3a+3)x^2 - 3a^2 - 4a + 4 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$f(x) = x^3 - (3a+3)x^2 - 3a^2 - 4a + 4$$

とおく。曲線 $y = x^3 - (3a+2)x^2 - 3a^2 - 4a + 4$ と放物線 $y = x^2$ が相異なる 3 点で交わる時、 x についての方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 実数解をもつ。さらに、方程式 $f(x) = 0$ の解は、3 次関数 $y = f(x)$ と直線 $y = 0$ (x 軸)の交点の x 座標に対応するため、方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 実数解をもつとき、3 次関数 $y = f(x)$ の極大値と極小値の正負は異なる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6(a+1)x \\ &= 3x(x - 2a - 2) \end{aligned}$$

であることから、 $f'(x) = 0$ のとき、 $x = 0, 2a+2$ となる。この 2 つの x の値は、関数 $f(x)$ の極大値または極小値を与える値である。

$$\begin{aligned} f(0) &= -3a^2 - 4a + 4 \\ f(2a+2) &= 8(a+1)^3 - 12(a+1)^2 - 3a^2 - 4a + 4 \\ &= -4\{a^3 + 3a^2 + 3a + 1\} - 3a^2 - 4a + 4 \\ &= -4a^3 - 15a^2 - 16a \end{aligned}$$

であることから、求める条件は

$$\begin{aligned} f(0)f(2a+2) &< 0 \\ \Leftrightarrow (-3a^2 - 4a + 4)(-4a^3 - 15a^2 - 16a) &< 0 \\ \Leftrightarrow a(a+2)(3a-2) \left\{ \left(2a + \frac{15}{4} \right)^2 + \frac{31}{16} \right\} &< 0 \\ \Leftrightarrow a(a+2)(3a-2) &< 0 \\ \therefore a < -2, 0 < a < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) a < -2, 0 < a < \frac{2}{3}$$

$x, y, 12-x^2$ を 3 辺の長さとする三角形が描けるとき、三角形成立条件より、以下の 3 つの不等式

$$\begin{cases} x+y > 12-x^2 \\ y+(12-x^2) > x \\ (12-x^2)+x > y \end{cases}$$

が成立する。これより、

$$\begin{cases} x+y > 12-x^2 \\ y+(12-x^2) > x \\ (12-x^2)+x > y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y > -x^2-x+12 \\ y > x^2+x-12 \\ y < -x^2+x+12 \end{cases}$$

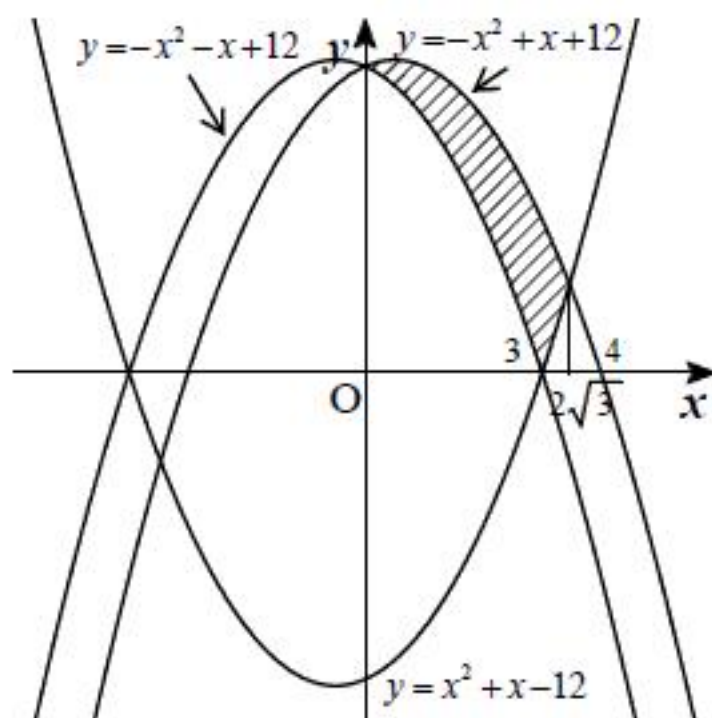
となる。ここで放物線 $y = -x^2 - x + 12$ と $y = x^2 + x - 12$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 12 &= x^2 + x - 12 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+4)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= -4, 3 \end{aligned}$$

となり、放物線 $y = x^2 + x - 12$ と $y = -x^2 + x + 12$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + x - 12 &= -x^2 + x + 12 \\ \Leftrightarrow x^2 - 12 &= 0 \\ \therefore x &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。よって、点 $P(x, y)$ の存在する領域は下図の斜線部分となる。(ただし、境界線は含まない。)



求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \{(-x^2 + x + 12) - (-x^2 - x + 12)\} dx + \int_3^{2\sqrt{3}} \{(-x^2 + x + 12) - (x^2 + x - 12)\} dx \\ &= \int_0^3 2x dx + \int_3^{2\sqrt{3}} (-2x^2 + 24) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^3 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 24x \right]_3^{2\sqrt{3}} \\ &= 32\sqrt{3} - 45 \end{aligned}$$

となる。