

1

(1)

四角形 ABCD は円に内接するので、

$$\begin{aligned}\angle ABC &= 180^\circ - \angle ADC \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ で余弦定理より、

$$\begin{aligned}AC^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 120^\circ \\ &= 9 + 16 + 12 \\ &= 37\end{aligned}$$

となるから、

$$AC = \sqrt{37} \quad (\because AC > 0)$$

である。

$$(\text{答}) \quad AC = \sqrt{37}$$

(2)

$\triangle ACD$ で余弦定理より、

$$\begin{aligned}AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow 37 &= AD^2 - 5AD + 25 \\ \Leftrightarrow AD^2 - 5AD - 12 &= 0 \\ \therefore AD &= \frac{5 + \sqrt{73}}{2} \quad (\because AD > 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AD = \frac{5 + \sqrt{73}}{2}$$

(3)

四角形 ABCD が内接している円は、 $\triangle ABC$ の外接円である。よってこの円の半径を R とおくと、 $\triangle ABC$ で正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{37}}{\sin 120^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{\sqrt{111}}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{111}}{3}$$

(1)

得点が0となるのは、2つのサイコロが両方とも p, q のいずれでもない4つの目のうちのいずれかが出た時であるから、得点が0となる確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

である。

(答) $\frac{4}{9}$

(2)

得点として考えられるものは $0, p, q, p+q, 2p, 2q$ であり、各得点となる確率は

$$0: \frac{4}{9} = \frac{16}{36},$$

$$p: \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{36} = \frac{8}{36},$$

$$q: \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{36} = \frac{8}{36},$$

$$p+q: \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{36} = \frac{2}{36},$$

$$2p: \frac{1 \cdot 1}{36} = \frac{1}{36},$$

$$2q: \frac{1 \cdot 1}{36} = \frac{1}{36}$$

である。したがって、求める期待値は

$$\frac{1}{36} \{8p + 8q + 2(p+q) + 2p + 2q\} = \frac{1}{3} (p+q)$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}(p+q)$

$$f_1(x) = x^3 - 2x^2 + 1,$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= xf_1'(x) + f_1(x) \\ &= x(3x^2 - 4x) + (x^3 - 2x^2 + 1) \\ &= 4x^3 - 6x^2 + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= xf_2'(x) + f_2(x) \\ &= x(12x^2 - 12x) + (4x^3 - 6x^2 + 1) \\ &= 16x^3 - 18x^2 + 1 \end{aligned}$$

より,

$$f_n(x) = 4^{n-1}x^3 - 2 \cdot 3^{n-1}x^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と推測できる。数学的帰納法により、任意の自然数 n について①が成立することを示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき,

$$f_1(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

より①は成立する。

[2] $n=k$ において①が成立している、すなわち

$$f_k(x) = 4^{k-1}x^3 - 2 \cdot 3^{k-1}x^2 + 1$$

であると仮定する。このとき,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= xf_k'(x) + f_k(x) \\ &= x(3 \cdot 4^{k-1}x^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3^{k-1}x) + 4^{k-1}x^3 - 2 \cdot 3^{k-1}x^2 + 1 \\ &= 4^k x^3 - 2 \cdot 3^k x^2 + 1 \end{aligned}$$

であるから、 $n=k+1$ においても①は成立する。

以上、[1]、[2]より、任意の自然数 n について①が成立することが示された。よって、

$$f_n(x) = 4^{n-1}x^3 - 2 \cdot 3^{n-1}x^2 + 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad f_n(x) = 4^{n-1}x^3 - 2 \cdot 3^{n-1}x^2 + 1$$

(1)

点 P の座標を (t, t^2) とおくと,

$$(x^2)' = 2x$$

より, 点 P における C_1 の法線の方程式は,

$$t \neq 0 \text{ のとき, } y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$$

$$t = 0 \text{ のとき, } x = 0$$

となる。よって, この法線が $(1, 2)$ を通るのは,

$$2 - t^2 = -\frac{1}{2t}(1 - t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ (2 - t^2)2t + 1 - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ 2t^3 - 3t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ (t+1)(2t^2 - 2t - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

のときである。よって

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ (複号同順)}$$

より, 求める点 P の座標は,

$$(-1, 1), \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}\right) \text{ (複号同順)}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad (-1, 1), \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}\right) \text{ (複号同順)}$$

(2)

$$\begin{cases} y = x^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

より,

$$(x-1)^2 + (x^2-2)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$\therefore (x, y) = (-1, 1), (0, 0), (2, 4)$$

となるから, 共有点の座標は

$$(-1, 1), (0, 0), (2, 4)$$

である。

$$\text{(答)} \quad (-1, 1), (0, 0), (2, 4)$$