

1

さいころを投げたとき、それぞれのさいころの目の出方は同様に確からしいとする。

(1)

さいころを3つ投げて出た目の最小値が2となるのは、3つの出た目がすべて2以上である場合のうち、3つの出た目がすべて3以上である場合を除いた場合である。よって、 $S=2$ となる確率は

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 &= \frac{125-64}{216} \\ &= \frac{61}{216}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{61}{216}$$

(2)

「 $S \leq 2$ かつ $T=6$ 」である事象の余事象は、「 $S \geq 3$ または $T \leq 5$ 」である事象となる。ここで、 $S \geq 3$ となる事象を $X$ 、 $T \leq 5$ となる事象を $Y$ とする。事象 $X$ は3つの目がすべて3以上である場合、事象 $Y$ は3つの目がすべて5以下である場合、事象 $X \cap Y$ は3つの目がすべて3以上5以下である場合にあたる。事象 $A$ の確率を $P(A)$ と表すことにすると、

$$\begin{aligned}P(X) &= \left(\frac{4}{6}\right)^3 \\ P(Y) &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ P(X \cap Y) &= \left(\frac{3}{6}\right)^3\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}P(X \cup Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 \\ &= \frac{162}{216} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となるから、求める確率は、この余事象の確率であり

$$1 - P(X \cup Y) = \frac{1}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{1}{4}$$

(3)

$S=k$  ( $k=1, 2, \dots, 6$ )となる確率を $p_k$ とおく。 $1 \leq k \leq 5$ のとき、 $S=k$ となるのは、3つの出た目がすべて $k$ 以上である場合のうち、3つの出た目がすべて $k+1$ 以上である場合を除いた場合である。よって、

$$\begin{aligned}p_k &= \left\{ \frac{6-(k-1)}{6} \right\}^3 - \left( \frac{6-k}{6} \right)^3 \\ &= \left( \frac{7-k}{6} \right)^3 - \left( \frac{6-k}{6} \right)^3\end{aligned}$$

となる。この式は、 $k=6$ の場合も成り立つので、 $1 \leq k \leq 6$ のとき

$$p_k = \left( \frac{7-k}{6} \right)^3 - \left( \frac{6-k}{6} \right)^3$$

である。これを用いて、 $S$ の期待値は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^6 k p_k &= \sum_{k=1}^6 k \left\{ \left( \frac{7-k}{6} \right)^3 - \left( \frac{6-k}{6} \right)^3 \right\} \\ &= \left( \frac{6}{6} \right)^3 + \left( \frac{5}{6} \right)^3 + \left( \frac{4}{6} \right)^3 + \left( \frac{3}{6} \right)^3 + \left( \frac{2}{6} \right)^3 + \left( \frac{1}{6} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6^3} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6+1) \right\}^2 \\ &= \frac{49}{24}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{49}{24}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ より,}$$

$$a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$$

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2})$$

と変形できる。これより、数列  $\left\{a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right\}$  は定数列、数列  $\{a_{n+1} - a_n\}$  は等比数列である。よ

って、 $a_2 = \frac{1}{2}a_1$  から

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n &= a_2 + \frac{1}{2}a_1 \\ &= a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_2 - a_1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_1 \end{aligned}$$

が得られる。これらの式を辺々引いて

$$\frac{3}{2}a_n = \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} a_1$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} a_1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$  より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$  であることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}a_1$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  より、

$$\frac{2}{3}a_1 = 2$$

$$\therefore a_1 = 3$$

となり、 $\textcircled{1}$ より

$$\therefore a_n = 2 \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

である。

$$(\text{答}) a_n = 2 \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$C: y = x^2$  について  $y' = 2x$  であるため、点  $P$  の座標を  $P(p, p^2)$  とおくと、 $P$  での  $C$  の接線の傾きは  $2p$  となる。これより、 $P$  における  $C$  の法線  $L(P)$  の方程式は

$$L(P): 2p(y - p^2) = -(x - p)$$

となる。これが点  $Q(a, 1)$  を通るとき

$$2p(1 - p^2) = -(a - p)$$

$$\therefore a = 2p^3 - p$$

である。ここで、 $f(p) = 2p^3 - p$  とおく。

$$\begin{aligned} f'(p) &= 6p^2 - 1 \\ &= (\sqrt{6}p + 1)(\sqrt{6}p - 1) \end{aligned}$$

であることより、関数  $f(p)$  の増減表は以下ようになる。

|         |            |                       |            |                       |            |
|---------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|
| $p$     | ...        | $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ | ...        | $\frac{1}{\sqrt{6}}$  | ...        |
| $f'(p)$ | +          | 0                     | -          | 0                     | +          |
| $f(p)$  | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{6}}{9}$  | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ | $\nearrow$ |

$L(P)$  が点  $Q$  を通るような点  $P$  がちょうど 3 個あるための  $a$  の範囲は、 $a = f(p)$  を満たす異なる  $p$  の値が 3 個あるための  $a$  の範囲にあたり、

$$-\frac{\sqrt{6}}{9} < a < \frac{\sqrt{6}}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) -\frac{\sqrt{6}}{9} < a < \frac{\sqrt{6}}{9}$$

(1)

$$f(x) = x + e^x - (1 + 2\sin x)$$

とおく。このとき

$$f'(x) = 1 + e^x - 2\cos x$$

となる。 $x > 0$  のとき、

$$e^x > 1, 1 \geq \cos x$$

であることから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + e^x - 2\cos x \\ &> 1 + 1 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $f(x)$  は単調増加関数である。 $f(0) = 0$  であることより、 $x > 0$  のとき  $f(x) > 0$  である。よって、

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow x + e^x - (1 + 2\sin x) &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 + 2\sin x &< x + e^x \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)より  $0 < x < \pi$  においてつねに

$$1 + 2\sin x < x + e^x$$

が成り立つ。また、2つの曲線  $y = 1 + 2\sin x$ ,  $y = x + e^x$  はともに点  $(0, 1)$  を通る。よって、 $x \geq 0$  の範囲にあって、2つの曲線  $y = 1 + 2\sin x$ ,  $y = x + e^x$  と直線  $x = \pi$  とで囲まれる領域を  $x$  軸の周りに1回転して得られる立体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \pi (x + e^x)^2 dx - \int_0^\pi \pi (1 + 2\sin x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^\pi \{ (x^2 + 2xe^x + e^{2x}) - (1 + 4\sin x + 4\sin^2 x) \} dx \\ &= \pi \int_0^\pi \{ x^2 + 2xe^x + e^{2x} - 1 - 4\sin x - 2(1 - \cos 2x) \} dx \\ &= \pi \int_0^\pi (x^2 + 2xe^x + e^{2x} - 3 - 4\sin x + 2\cos 2x) dx \\ &= \pi \left[ \frac{x^3}{3} + 2(xe^x - e^x) + \frac{1}{2}e^{2x} - 3x + 4\cos x + \sin 2x \right]_0^\pi \\ &= \pi \left( \frac{\pi^3}{3} + 2\pi e^\pi - 2e^\pi + \frac{1}{2}e^{2\pi} - 3\pi - \frac{13}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \pi \left( \frac{\pi^3}{3} + 2\pi e^\pi - 2e^\pi + \frac{1}{2}e^{2\pi} - 3\pi - \frac{13}{2} \right)$$