

平成 25 年 度 数 学 (01)

試験開始の合図があるまでに、次の注意をよく読んで、間違いないように受験してください。

1. 試験開始の合図があるまで冊子を開かないでください。
2. この冊子には問題 2 ページ、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ) 2 枚と計算用紙がセットになっています。
3. 試験開始の合図があったら、問題のページ数を確認し、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ)と計算用紙をミシン目で折ってから冊子よりていねいに切り離し、すべての用紙に受験番号を記入してください。
4. 問題・解答用紙に落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所がある場合には申し出てください。
5. 解答の記入は黒鉛筆(シャープペンシル可)に限ります。
6. 文字ははっきり、ていねいに書いてください。
7. 計算・下書きには計算用紙を使ってください。
8. 解答用紙の点数欄には何も記入しないでください。
9. 複数の解答用紙がある場合、使用していない解答用紙は机の上に裏返しにしてください。
10. 試験終了の合図があったら、解答用紙(そのⅠ)・(そのⅡ)のみ提出してください。計算用紙は提出しないでください。

1

不等式

$$\frac{x^2 - 1}{x} \leq 1$$

を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(25 点)

2 a, b, c を実数とする。

(1) 不等式

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

を証明せよ。また、等号が成り立つとき $a = b = c$ であることを証明せよ。

(2) 不等式

$$27(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)^4$$

を証明せよ。

(25 点)

3 $\vec{a}, \vec{b}$ はともに平面上の長さ1のベクトルで, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ を満たすとする。ただし, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は内積を表す。

(1) ベクトル $\vec{a} + 2\vec{b}$ の長さ $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ を求めよ。

(2) 内積

$$(\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{b})$$

を最大にする長さ1のベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ。また, その最大値を求めよ。

(25 点)

4 t は正の実数とする。放物線 $C: y = -x^2$ 上の点 $P(t, -t^2)$ を頂点とする放物線 $y = 3x^2 + bx + c$ を D とする。また, 点 $P(t, -t^2)$ における C の接線を L とする。

(1) b, c を t で表せ。

(2) L と D の交点を求めよ。

(3) C と D の上側にあつて L の下側にある部分の面積を求めよ。

(25 点)