

1

[1] $n \geq -1$ のとき

$$n^2 + n + 1 \leq 3|n+1|$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \leq 3(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq n \leq 1 + \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $1 < \sqrt{3} < 2$ より

$$-1 < 1 - \sqrt{3} < 0, 2 < 1 + \sqrt{3} < 3$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす整数 n は

$$n = 0, 1, 2$$

である。

[2] $n < -1$ のとき

$$n^2 + n + 1 \leq 3|n+1|$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \leq -3(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (n+2)^2 \leq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $(n+2)^2 \geq 0$ であるから、 $\textcircled{2}$ を満たす n の値は

$$(n+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -2$$

となり、これは整数であるから適する。

以上、[1], [2]より、求める整数 n は $-2, 0, 1, 2$ となる。

(答) $-2, 0, 1, 2$

(1)

部屋 B が使用できないのは、3 つの電灯のうち点灯するものが半分未満であるとき、つまり、点灯しない電灯が 2 つまたは 3 つのときであるから、そのようになる確率 p_B は

$$\begin{aligned} p_B &= {}_3C_2 p^2 (1-p) + p^3 \\ &= -2p^3 + 3p^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_B = -2p^3 + 3p^2$$

(2)

部屋 A が使用できないのは、2 つの電灯のうち点灯するものが半分未満であるとき、つまり、点灯しない電灯が 2 つのときであるから、そのようになる確率 p_A は

$$p_A = p^2$$

となる。また、部屋 C が使用できないのは、4 つの電灯のうち点灯するものが半分未満であるとき、つまり、点灯しない電灯が 3 つまたは 4 つのときであるから、そのようになる確率 p_C は

$$\begin{aligned} p_C &= {}_4C_3 p^3 (1-p) + p^4 \\ &= -3p^4 + 4p^3 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $p_A > p_C$ となるのは

$$\begin{aligned} p_A &> p_C \\ \Leftrightarrow p^2 &> -3p^4 + 4p^3 \\ \Leftrightarrow p^2 (3p^2 - 4p + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow p^2 (p-1)(3p-1) &> 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

のときである。 p は確率の値であることから

$$0 \leq p \leq 1$$

である。このとき

$$p^2 \geq 0, \quad p-1 \leq 0$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす p の範囲は

$$0 \leq p \leq 1 \text{ かつ } p^2 \neq 0 \text{ かつ } p-1 \neq 0 \text{ かつ } 3p-1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < p < 1 \text{ かつ } p < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < p < \frac{1}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < p < \frac{1}{3}$$

すべての自然数 n に対して、不等式

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} > \sqrt{2n+1} - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\textcircled{1} \text{の左辺} = 1$$

$$\textcircled{1} \text{の左辺} = \sqrt{3} - 1$$

となり

$$1 > \sqrt{3} - 1$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定する

このとき

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2k-1}} > \sqrt{2k+1} - 1$$

が成り立つもとで

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2k-1}} + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)-1}} - \{\sqrt{2(k+1)+1} - 1\} \\ & > \sqrt{2k+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - (\sqrt{2k+3} - 1) \\ & = \sqrt{2k+1} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+3} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \{(2k+1)+1 - \sqrt{(2k+1)(2k+3)}\} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \{(2k+2) - \sqrt{(2k+2)^2 - 1}\} \\ & > 0 \end{aligned}$$

となるから

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2k-1}} + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)-1}} > \sqrt{2(k+1)+1} - 1$$

となる。よって、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上、[1], [2]より、すべての自然数 n に対して、不等式

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} > \sqrt{2n+1} - 1$$

が成り立つことが示された。

4

(1)

$$f(x) = x^2 \text{ とおくと}$$

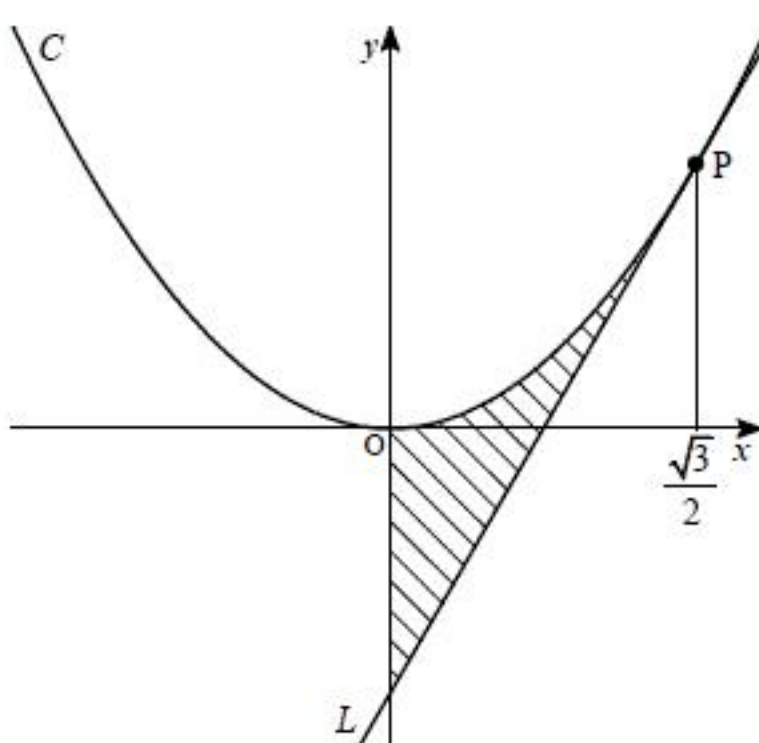
$$f'(x) = 2x$$

となるから、放物線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ における接線 L の方程式は

$$y = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$$

である。よって、 C, L, y 軸で囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



よって、求めるこの部分の面積は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ x^2 - \left(\sqrt{3}x - \frac{3}{4} \right) \right\} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

(2)

円 K の中心を $B(a, b)$ とおくと、 K と x 軸の接点の x 座標は a であり、 K は x 軸の正の部分に接するから

$$a > 0$$

である。また、点 P は第 1 象限にあることから、点 B の y 座標は正の値となり

$$b > 0$$

である。よって、このとき円 K の半径は b となる。以上より、円 K が点 P で L に接すること

から、点 B と直線 $L: y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$ の距離を D とおくと

$$D = b \quad \dots \textcircled{1}$$

$$PB \perp L \quad \dots \textcircled{2}$$

がともに成り立つ。①より

$$\frac{\left| \sqrt{3}a - b - \frac{3}{4} \right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = b$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{3}a - b - \frac{3}{4} \right| = 2b \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また、直線 L の方向ベクトルを $\vec{l}$ とおくと $\vec{l} = (1, \sqrt{3})$ であるから、②より

$$\overrightarrow{PB} \perp \vec{l}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PB} \cdot \vec{l} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1 + \left(b - \frac{3}{4} \right) \cdot \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + \sqrt{3}b - \frac{5\sqrt{3}}{4} = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。

[1] $\sqrt{3}a - b - \frac{3}{4} \geq 0$ のとき

③より

$$\sqrt{3}a - b - \frac{3}{4} = 2b$$

$$\Leftrightarrow a - \sqrt{3}b - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

となるから、これと④より

$$\begin{cases} a - \sqrt{3}b - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \\ a + \sqrt{3}b - \frac{5\sqrt{3}}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

となり、これは $a > 0, b > 0$ を満たす。

[2] $\sqrt{3}a - b - \frac{3}{4} < 0$ のとき

③より

$$-\left(\sqrt{3}a - b - \frac{3}{4} \right) = 2b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}a + b - \frac{3}{4} = 0$$

となるから、これと④より

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + b - \frac{3}{4} = 0 \\ a + \sqrt{3}b - \frac{5\sqrt{3}}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{2} \right)$$

となり、これは $a > 0$ を満たさず、不適である。

以上、[1], [2]より、求める円 K の中心の座標は $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2} \right)$ である。

(答) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2} \right)$