

以下、サイコロを投げたときに各目の出方は同様に確からしいとする。また、点 A, B, C, D に割り当てられる数をそれぞれ a, b, c, d とする。

(1)

a より定めることにすると、 a の数の選び方は 6 通りある。このとき、 $b \neq a$ より b の数の選び方は 5 通りある。さらに、 $c \neq b$ より c の数の選び方は 5 通りあり、 $d \neq c$ より d の数の選び方は 5 通りある。よって、(条件) を満たす目の出方は全部で

$$6 \times 5 \times 5 \times 5 \text{ 通り}$$

ある。よって、求める確率は

$$\frac{6 \times 5 \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{125}{216}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{125}{216}$$

(2)

a より定めることにすると、 a の数の選び方は 6 通りある。このとき、 $b \neq a$ より b の数の選び方は 5 通りあり、 $c \neq a, c \neq b$ より c の数の選び方は 4 通りある。さらに、 $d \neq c, d \neq a$ であるが $a \neq c$ より d の数の選び方は 4 通りある。よって、(条件) を満たす目の出方は全部で

$$6 \times 5 \times 4 \times 4 \text{ 通り}$$

ある。よって、求める確率は

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 4}{6^4} = \frac{10}{27}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{10}{27}$$

(3)

[1] $a = c$ のとき

a より定めることにすると、 a の数の選び方は 6 通りある。このとき、 $c = a$ より c の数の選び方は 1 通りである。さらに、 $b \neq a, b \neq c$ であるが $a = c$ より b の数の選び方は 5 通りあり、 $d \neq a, d \neq c$ であるが $a = c$ より d の数の選び方は 5 通りある。よって、(条件) を満たす目の出方は全部で

$$6 \times 1 \times 5 \times 5 \text{ 通り}$$

ある。

[2] $a \neq c$ のとき

a より定めることにすると、 a の数の選び方は 6 通りある。このとき、 $c \neq a$ より c の数の選び方は 5 通りである。さらに、 $b \neq a, b \neq c$ であるが $a \neq c$ より b の数の選び方は 4 通りあり、 $d \neq a, d \neq c$ であるが $a \neq c$ より d の数の選び方は 4 通りある。よって、(条件) を満たす目の出方は全部で

$$6 \times 5 \times 4 \times 4 \text{ 通り}$$

ある。

以上、[1], [2] の場合は互いに排反であることより、求める確率は

$$\frac{6 \times 1 \times 5 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 \times 4}{6^4} = \frac{35}{72}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{35}{72}$$

$P(1, 2)$ と $L: y = ax + 1$ の距離 p は

$$\begin{aligned} p &= \frac{|a \cdot 1 - 2 + 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

であり、 $Q(3, 2)$ と $L: y = ax + 1$ の距離 q は

$$\begin{aligned} q &= \frac{|a \cdot 3 - 2 + 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|3a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= \frac{|a - 1|^2}{a^2 + 1} + \frac{|3a - 1|^2}{a^2 + 1} \\ &= \frac{10a^2 - 8a + 2}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。ここで、実数 k を用いて

$$p^2 + q^2 = k$$

とおくと

$$\frac{10a^2 - 8a + 2}{a^2 + 1} = k$$

$$\Leftrightarrow (k - 10)a^2 + 8a + k - 2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 a が実数全体を動くときの k の値のとり得る範囲は、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 a が存在するような k の条件となる。

[1] $k = 10$ のとき

$\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} 8a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ を満たす a の値は存在する。

[2] $k \neq 10$ のとき

$\textcircled{1}$ は a についての 2 次方程式とみることができ、この方程式の判別式を D とおくと、 $\textcircled{1}$ を満たす a の値が存在するとき

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4^2 - (k - 10)(k - 2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 12k + 4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 6 - 4\sqrt{2} \leq k &\leq 6 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

となるが、この範囲には $k = 10$ が含まれるから、このときの $\textcircled{1}$ を満たす実数 a が存在するような k のとり得る値の範囲は

$$6 - 4\sqrt{2} \leq k < 10, 10 < k \leq 6 + 4\sqrt{2}$$

である。

以上、[1]、[2] より、 a が実数全体を動くときの k の値のとり得る範囲は

$$6 - 4\sqrt{2} \leq k \leq 6 + 4\sqrt{2}$$

となる。よって、 a が実数全体を動くとき、 $p^2 + q^2$ は最小値 $6 - 4\sqrt{2}$ をとる。さらにこのときの a の値は、 $k = 6 - 4\sqrt{2}$ のときの $\textcircled{1}$ の解を求めて

$$\begin{aligned} -4(1 + \sqrt{2})a^2 + 8a + 4(1 - \sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2(\sqrt{2} - 1)a + (\sqrt{2} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{a - (\sqrt{2} - 1)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \sqrt{2} - 1$ のとき最小値 $6 - 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x+a) - \sqrt{3} \cos(x+a) \\
 &= 2 \sin(x+a-60^\circ)
 \end{aligned}$$

である。

[1] $0^\circ \leq a < 60^\circ$ のとき

$$0^\circ \leq x \leq 90^\circ \text{ のとき } a-60^\circ \leq x+a-60^\circ \leq a+30^\circ \text{ となり}$$

$$-60^\circ \leq a-60^\circ < 0^\circ, 30^\circ \leq a+30^\circ < 90^\circ$$

であるから、 $f(x)$ は

$$x+a-60^\circ = a+30^\circ \text{ つまり } x=90^\circ \text{ のとき最大値 } 2 \sin(a+30^\circ)$$

$$x+a-60^\circ = a-60^\circ \text{ つまり } x=0^\circ \text{ のとき最小値 } 2 \sin(a-60^\circ)$$

をとる。

[2] $60^\circ \leq a < 105^\circ$ のとき

$$0^\circ \leq x \leq 90^\circ \text{ のとき } a-60^\circ \leq x+a-60^\circ \leq a+30^\circ \text{ となり}$$

$$0^\circ \leq a-60^\circ < 45^\circ, 90^\circ \leq a+30^\circ < 135^\circ$$

であるから、 $f(x)$ は

$$x+a-60^\circ = 90^\circ \text{ つまり } x=150^\circ-a \text{ のとき最大値 } 2$$

$$x+a-60^\circ = a-60^\circ \text{ つまり } x=0^\circ \text{ のとき最小値 } 2 \sin(a-60^\circ)$$

をとる。

[3] $105^\circ \leq a < 150^\circ$ のとき

$$0^\circ \leq x \leq 90^\circ \text{ のとき } a-60^\circ \leq x+a-60^\circ \leq a+30^\circ \text{ となり}$$

$$45^\circ \leq a-60^\circ < 90^\circ, 135^\circ \leq a+30^\circ < 180^\circ$$

であるから、 $f(x)$ は

$$x+a-60^\circ = 90^\circ \text{ つまり } x=150^\circ-a \text{ のとき最大値 } 2$$

$$x+a-60^\circ = a+30^\circ \text{ つまり } x=90^\circ \text{ のとき最小値 } 2 \sin(a+30^\circ)$$

をとる。

[4] $150^\circ \leq a \leq 180^\circ$ のとき

$$0^\circ \leq x \leq 90^\circ \text{ のとき } a-60^\circ \leq x+a-60^\circ \leq a+30^\circ \text{ となり}$$

$$90^\circ \leq a-60^\circ \leq 120^\circ, 180^\circ \leq a+30^\circ \leq 210^\circ$$

であるから、 $f(x)$ は

$$x+a-60^\circ = a-60^\circ \text{ つまり } x=0^\circ \text{ のとき最大値 } 2 \sin(a-60^\circ)$$

$$x+a-60^\circ = a+30^\circ \text{ つまり } x=90^\circ \text{ のとき最小値 } 2 \sin(a+30^\circ)$$

をとる。

以上、[1], [2], [3], [4]より、 x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 $f(x)$ の最大値は

$$0^\circ \leq a < 60^\circ \text{ のとき } 2 \sin(a+30^\circ)$$

$$60^\circ \leq a < 150^\circ \text{ のとき } 2$$

$$150^\circ \leq a \leq 180^\circ \text{ のとき } 2 \sin(a-60^\circ)$$

となり、最小値は

$$0^\circ \leq a < 105^\circ \text{ のとき } 2 \sin(a-60^\circ)$$

$$105^\circ \leq a \leq 180^\circ \text{ のとき } 2 \sin(a+30^\circ)$$

である。

(答) 最大値	$0^\circ \leq a < 60^\circ$ のとき	$2 \sin(a+30^\circ)$
	$60^\circ \leq a < 150^\circ$ のとき	2
	$150^\circ \leq a \leq 180^\circ$ のとき	$2 \sin(a-60^\circ)$
最小値	$0^\circ \leq a < 105^\circ$ のとき	$2 \sin(a-60^\circ)$
	$105^\circ \leq a \leq 180^\circ$ のとき	$2 \sin(a+30^\circ)$

(1)

$f(x) = \left(2x + \frac{1}{a}\right)^2$, $g(x) = (x-a)^2$ とおくと, $C_1: y = f(x)$, $C_2: y = g(x)$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow \left(2x + \frac{1}{a}\right)^2 &= (x-a)^2 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(2x + \frac{1}{a}\right) + (x-a)\right\} \left\{\left(2x + \frac{1}{a}\right) - (x-a)\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(3x - a + \frac{1}{a}\right) \left(x + a + \frac{1}{a}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{a}\right), -\left(a + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

となるから, C_1, C_2 の交点の座標は

$$\left(-\left(a + \frac{1}{a}\right), \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2\right), \left(\frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{a}\right), \frac{1}{9} \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2\right)$$

である。

$$(\text{答}) \left(-\left(a + \frac{1}{a}\right), \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2\right), \left(\frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{a}\right), \frac{1}{9} \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2\right)$$

(2)

$\alpha = -\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $\beta = \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{a}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{4}{3}a + \frac{2}{3a} \\ &> 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

であるから $\alpha < \beta$ となる。さらに, (1) を利用して

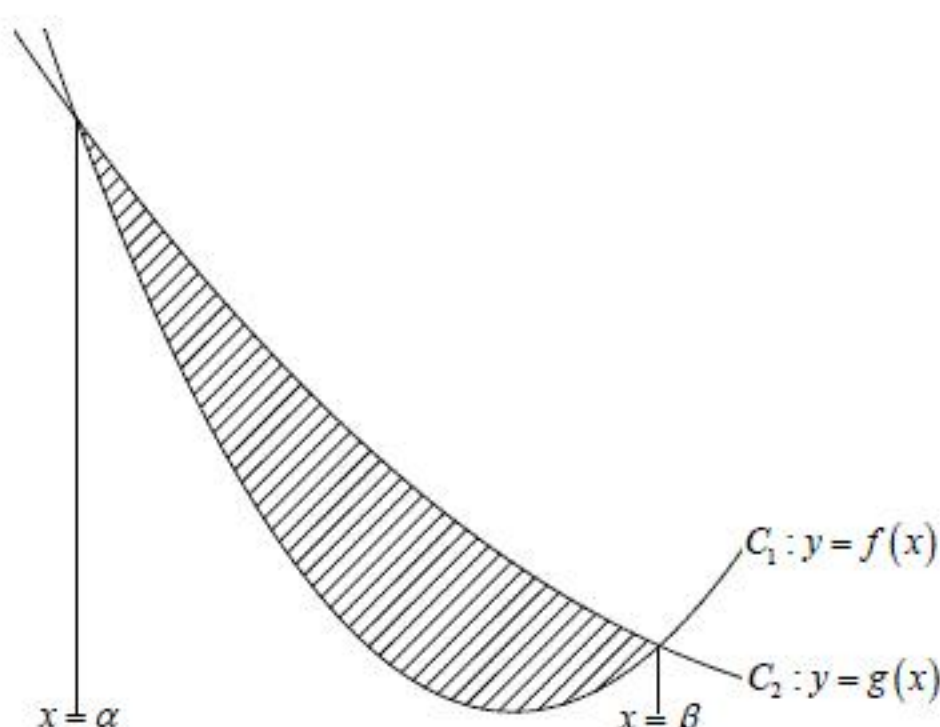
$$f(x) - g(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

となるから

$$x \leq \alpha, \beta \leq x \text{ のとき } f(x) \geq g(x)$$

$$\alpha < x < \beta \text{ のとき } f(x) < g(x)$$

となり, C_1, C_2 とで囲まれる部分は下図の斜線部のようになる。



以上より, C_1, C_2 とで囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{3}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}a + \frac{2}{3a}\right)^3 \\ &= \frac{4}{27} \left(2a + \frac{1}{a}\right)^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) S = \frac{4}{27} \left(2a + \frac{1}{a}\right)^3$$

(3)

a は正の実数であるから, $2a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ となる。よって, 相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} 2a + \frac{1}{a} &\geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となり, 等号成立は

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のときである。 $2a + \frac{1}{a}$ が最小となるときと $\left(2a + \frac{1}{a}\right)^3$ が最小となるときは一致するから, S は

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{27} (2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{27} \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \frac{64\sqrt{2}}{27}$$