

1

(1)

P が (0, 0) から 4 回の試行後に (1, 3) にいるのは、大きなコインが 1 回表、3 回裏となる場合である。よって、このようになる確率は

$${}_4C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

P が (0, 0) から 4 回の試行後にいる点は (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0) のいずれかであり、Q が (4, 4) から 4 回の試行後にいる点も (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0) のいずれかである。

[1] P と Q が (0, 4) にいるとき

P が (0, 0) から 4 回の試行後に (0, 4) にいるのは、大きなコインが 4 回裏となる場合であり、Q が (4, 4) から 4 回の試行後に (0, 4) にいるのは、小さなコインが 4 回表となる場合である。よって、このときの確率は

$${}_4C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

となる。

[2] P と Q が (1, 3) にいるとき

P が (0, 0) から 4 回の試行後に (1, 3) にいる確率は、(1)の結果より $\frac{1}{4}$ であり、Q が (4, 4) から 4 回の試行後に (1, 3) にいるのは、小さなコインが 3 回表、1 回裏となる場合である。よって、このときの確率は

$$\frac{1}{4} \times {}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

となる。

[3] P と Q が (2, 2) にいるとき

P が (0, 0) から 4 回の試行後に (2, 2) にいるのは、大きなコインが 2 回表、2 回裏となる場合であり、Q が (4, 4) から 4 回の試行後に (2, 2) にいるのは、小さなコインが 2 回表、2 回裏となる場合である。よって、このときの確率は

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{9}{64}$$

となる。

[4] P と Q が (3, 1) にいるとき

このときの確率は、図形と確率の対称性より [2] の場合と同様であり、 $\frac{1}{16}$ となる。

[5] P と Q が (4, 0) にいるとき

このときの確率は、図形と確率の対称性より [1] の場合と同様であり、 $\frac{1}{256}$ となる。

以上、[1], [2], [3], [4], [5] の場合は互いに排反であることより、求める確率は

$$\frac{1}{256} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{256} = \frac{35}{128}$$

である。

(答) $\frac{35}{128}$

2

$$n^2 + (1+ai)n + b + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow (n^2 + n + b) + (an + 2)i = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、 a, b, n が整数であるとき $n^2 + n + b, an + 2$ は実数となるから、 $\textcircled{1}$ が成り立つとき

$$n^2 + n + b = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$an + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

が同時に成り立つ。 $\textcircled{3}$ より、整数の組 (a, n) は -2 の負の数を含む約数の組であるから

$$(a, n) = (-2, 1), (-1, 2), (1, -2), (2, -1)$$

となる。このそれぞれについて、 $\textcircled{2}$ を満たす整数 b を求めることにより、求める整数 a, b, n の組は

$$(a, b, n) = (-2, -2, 1), (-1, -6, 2), (1, -2, -2), (2, 0, -1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b, n) = (-2, -2, 1), (-1, -6, 2), (1, -2, -2), (2, 0, -1)$$

$\vec{a} = (a, 1), \vec{b} = (b, 1)$ とするとき, $a \geq b$ としても一般性は失われない。さらに, $A(a, 1), B(b, 1)$ とおく。

[1] $\vec{a} = \vec{b}$ のとき

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \text{ より}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 0$$

となる。また, $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角度 θ は $\theta = 0^\circ$ であるから

$$\sin \theta = 0$$

となる。よって, このとき等式

$$\sin \theta = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

は成り立つ。

[2] $\vec{a} \neq \vec{b}$ のとき

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角度 θ は $0^\circ < \theta < 180^\circ$ となるから, 3 点 O, A, B は三角形をなす。ここで, $\triangle$

OAB の面積を S とおくと, $OA = |\vec{a}|, OB = |\vec{b}|$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \end{aligned}$$

となる。一方, $AB = |\vec{a} - \vec{b}|$ であり, 2 点 A, B は直線 $y=1$ 上の点であるから, AB を底辺と

するとき $\triangle OAB$ の高さは 1 となるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}| \end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta &= \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}| \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より, 等式

$$\sin \theta = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

が成り立つことが示された。

4

[1] $t \leq 0$ のとき

$$x^2 - tx = x(x - t)$$

であるから、 $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$x^2 - tx \geq 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 (3x^2 + tx - 2|x^2 - tx|) dx \\ &= \int_0^1 \{(3x^2 + tx) - 2(x^2 - tx)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^2 + 3tx) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3t}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}t + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] $0 < t \leq 1$ のとき

$$x^2 - tx = x(x - t)$$

であるから、 $0 \leq x \leq 1$ において

$$0 \leq x \leq t \text{ のとき } x^2 - tx \leq 0$$

$$t < x \leq 1 \text{ のとき } x^2 - tx > 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 (3x^2 + tx - 2|x^2 - tx|) dx \\ &= \int_0^t \{(3x^2 + tx) - 2(-x^2 + tx)\} dx + \int_t^1 \{(3x^2 + tx) - 2(x^2 - tx)\} dx \\ &= \int_0^t (5x^2 - tx) dx + \int_t^1 (x^2 + 3tx) dx \\ &= \left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{t}{2}x^2 \right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3t}{2}x^2 \right]_t^1 \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。このとき

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2t^2 + \frac{3}{2} \\ &= -2 \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

となるから、 $0 < t \leq 1$ における関数 $f(t)$ の増減は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(t)$	↗	+	0	-	
$f(t)$	↗	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}$	↘	$\frac{7}{6}$

さらに

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \frac{1}{3}$$

である。

[3] $1 < t$ のとき

$$x^2 - tx = x(x - t)$$

であるから、 $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$x^2 - tx \leq 0$$

となる。よって

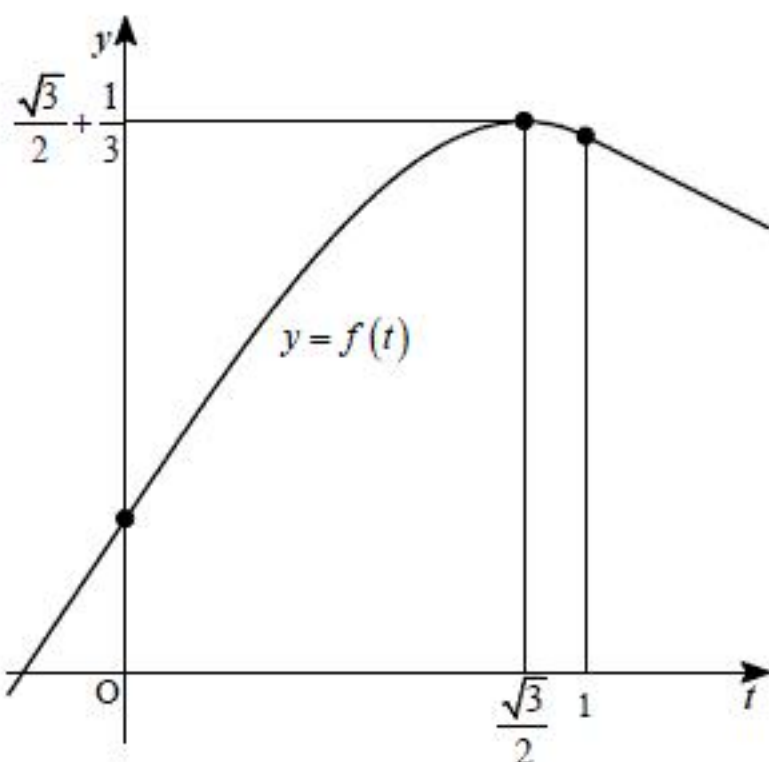
$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 (3x^2 + tx - 2|x^2 - tx|) dx \\ &= \int_0^1 \{(3x^2 + tx) - 2(-x^2 + tx)\} dx \\ &= \int_0^1 (5x^2 - tx) dx \\ &= \left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{t}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

である。このとき

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{7}{6}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、 $y = f(t)$ のグラフの概形は下図のようになる。



よって、 $f(t)$ は

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}$$

をとる。

(答) 最大値： $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}$ ，最大値を与える t ： $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$