

(1)

3桁の整数 $n$ が偶数になるのは、 $n$ の1の位 $c$ の値が偶数のときであるから、求める確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答)  $\frac{1}{2}$

(2)

3桁の整数 $n$ は $a, b, c$ を用いて、

$$n = 100a + 10b + c$$

と表せられる。まず、 $n$ を3で割った余りが2である条件を考える。 $n$ の式を変形すると、

$$\begin{aligned} n &= 100a + 10b + c \\ &= (99a + a) + (9b + b) + c \\ &= 3(33a + 3b) + a + b + c \end{aligned}$$

が得られる。 $33a + 3b$ は整数であるから、 $n$ を3で割った余りは $a + b + c$ を3で割った余りと等しくなる。したがって、 $n$ を3で割った余りが2となるのは、 $a + b + c$ を3で割った余りが2となるときである。任意の $(a, b)$ の組について、 $a + b$ を3で割った余りを考える。余りが0であるとき、 $c = 2, 5$ とすれば $a + b + c$ を3で割った余りは2となる。次に、 $a + b$ を3で割った余りが1であるとき、 $c = 1, 4$ とすれば $a + b + c$ を3で割った余りは2となる。また、 $a + b$ を3で割った余りが2のとき、 $c = 3, 6$ を選べば $a + b + c$ を3で割った余りは2となる。したがって、どの $a + b$ の値についても $a + b + c$ を3で割った余りを2とする $c$ の値は2通りずつであるから、求める確率は、

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

となる。

(答)  $\frac{1}{3}$

(3)

$n \geq 325$ となる場合を数え上げる。 $a = 4, 5, 6$ のとき、

$$3 \cdot 6^2 = 108 \text{ (通り)}$$

となる。 $a = 3$ のとき、 $b = 3, 4, 5, 6$ のとき $n \geq 325$ となり、この場合の数は

$$1 \cdot 4 \cdot 6 = 24 \text{ (通り)}$$

となる。 $a = 3, b = 2$ のとき、 $c = 5, 6$ のとき $n \geq 325$ となり、この場合の数は

$$1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \text{ (通り)}$$

となる。以上より、 $n \geq 325$ となる場合の数は、

$$108 + 24 + 2 = 134$$

となる。したがって、求める確率は、

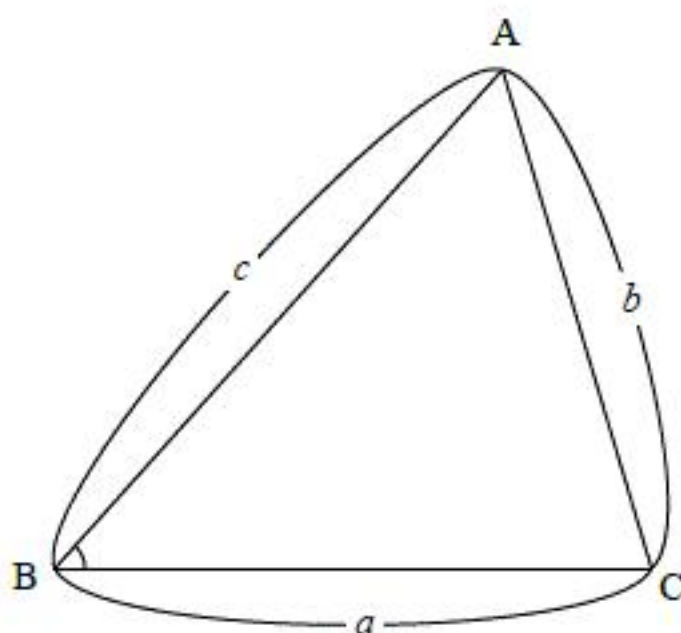
$$\frac{134}{6^3} = \frac{67}{108}$$

となる。

(答)  $\frac{67}{108}$

(1)

三角形 ABC を図示すると以下のようになる。



余弦定理より、

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

となる。ここで、条件式  $(a+b+c)(a-b+c) = 3ac$  を整理すると、

$$(a+b+c)(a-b+c) = 3ac$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2 - b^2 = 3ac$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 = ac$$

が得られる。以上よりこの2式から、

$$2ac \cos B = ac$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{2} (\because ac \neq 0)$$

となる。

(答)  $\frac{1}{2}$

(2)

(1)の結果より、 $B$  は三角形の内角であるから、

$$B = \frac{\pi}{3}$$

となる。したがって、三角形の内角の和は  $\pi$  であるから、

$$A + C = \frac{2}{3}\pi$$

となる。ここで、積和公式により、

$$\sin A \sin C = -\frac{1}{2} \{ \cos(A+C) - \cos(A-C) \}$$

である。条件式より  $\sin A \sin C = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$  であるから、

$$\frac{1+\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} \{ \cos(A+C) - \cos(A-C) \}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \cos(A-C)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-C) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。 $A+C = \frac{2}{3}\pi$  と、 $A \leq C$ 、 $A$  と  $C$  が三角形の内角であるから、

$$A-C = -\frac{1}{6}\pi$$

となる。したがって、求める角度は

$$A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{5}{12}\pi$$

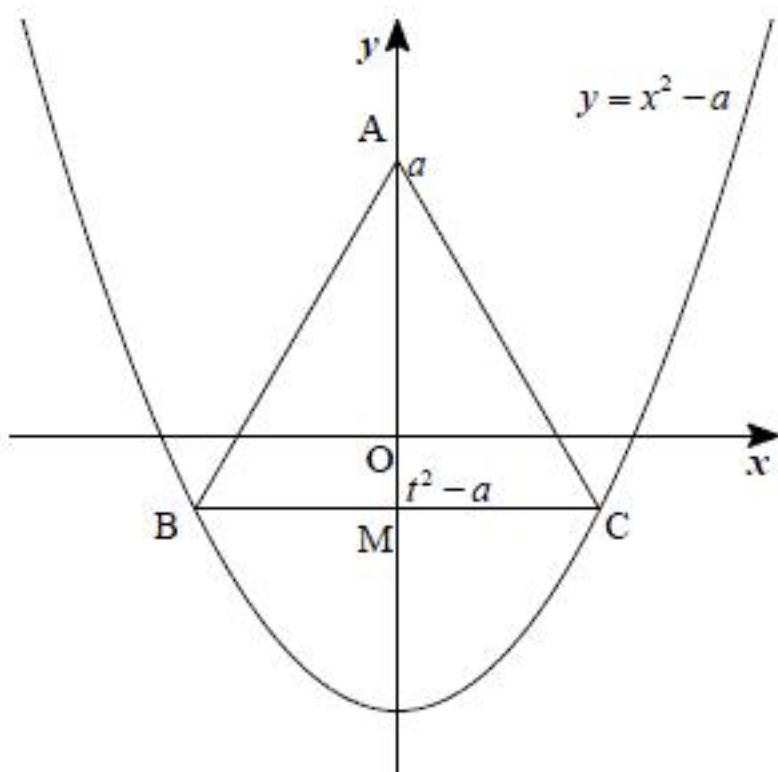
となる。

(答)  $A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{5}{12}\pi$

3

(1)

△ABCを図示すると、以下のようになる。また図のように辺BCの中点をMとする。



△ABCは正三角形より、

$$AM = \sqrt{3}CM$$

である。したがって、

$$AM = \sqrt{3}CM$$

$$\Leftrightarrow 2a - t^2 = \sqrt{3}t$$

$$\therefore a = \frac{t^2 + \sqrt{3}t}{2}$$

が得られる。

$$(答) \ a = \frac{t^2 + \sqrt{3}t}{2}$$

(2)

$0 < t \leq \sqrt{a}$  であるから、

$$t^2 \leq a$$

となる。(1)の結果をこの不等式に代入すると、

$$t^2 \leq a$$

$$\Leftrightarrow t^2 \leq \frac{t^2 + \sqrt{3}t}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \sqrt{3}t \leq 0$$

$$\Leftrightarrow t(t - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

が得られる。これと、 $0 < t$ を合わせると、

$$0 < t \leq \sqrt{3}$$

となる。

(証明終)

(3)

$y = x^2 - a$ ,  $y = -x^2 + a$ の交点は、 $(\pm\sqrt{a}, 0)$ となる。ここで、放物線に囲まれた面積 $S$ を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \{(-x^2 + a) - (x^2 - a)\} dx \\ &= -4 \int_0^{\sqrt{a}} (x^2 - a) dx \\ &= -4 \left[ \frac{x^3}{3} - ax \right]_0^{\sqrt{a}} \\ &= \frac{8}{3} a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。また、△ABCの面積 $T$ を計算すると、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot (2a - t^2) \\ &= \sqrt{3}t^2 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\left(\frac{S}{T}\right)^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{T}\right)^2 &= \left(\frac{8}{3}a^{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}t^2}\right)^2 \\ &= \frac{64}{9} \left(\frac{t^2 + \sqrt{3}t}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3t^4} \\ &= \frac{8}{27} \cdot \frac{(t^2 + \sqrt{3}t)^3}{t^4} \\ &= \frac{8}{27} \cdot \frac{(t + \sqrt{3})^3}{t} \end{aligned}$$

が得られる。 $\frac{S}{T}$ の最小値を調べるのに、 $\left(\frac{S}{T}\right)^2$ の最小値を調べればよい。ここで、

$$f(t) = \frac{(t + \sqrt{3})^3}{t}$$

とおく。ただし、 $0 < t \leq \sqrt{3}$ である。これを $t$ に関して微分すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{3(t + \sqrt{3})^2 \cdot t - (t + \sqrt{3})^3}{t^2} \\ &= \frac{(t + \sqrt{3})^2 (2t - \sqrt{3})}{t^2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、増減表は以下のようになる。

|         |   |            |                      |            |            |
|---------|---|------------|----------------------|------------|------------|
| $t$     | 0 | ...        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ...        | $\sqrt{3}$ |
| $f'(t)$ |   | -          | 0                    | +          |            |
| $f(t)$  |   | $\searrow$ | $\frac{81}{4}$       | $\nearrow$ |            |

以上より、 $f(t)$ の最小値は $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のときであるから、 $\frac{S}{T}$ の最小値は、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{8}{27} f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} &= \left\{ \frac{8}{27} \cdot \frac{81}{4} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\sqrt{6}$

(1)

$f(a)$  を計算すると,

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_{-a}^a \frac{e^x}{(e^x)^2 + 3e^x + 2} dx \\
 &= \int_{-a}^a \frac{e^x}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx \\
 &= \int_{-a}^a \left( \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 2} \right) dx \\
 &= \left[ \log(e^x + 1) - \log(e^x + 2) \right]_{-a}^a \\
 &= \log \frac{(e^a + 1)}{(e^a + 2)} - \log \frac{(e^{-a} + 1)}{(e^{-a} + 2)} \\
 &= \log \left\{ \frac{(e^a + 1)(e^{-a} + 2)}{(e^a + 2)(e^{-a} + 1)} \right\} \\
 &= \log \left\{ \frac{(e^a + 1)(e^{-a} + 2) \cdot e^a}{(e^a + 2)(e^{-a} + 1) \cdot e^a} \right\} \\
 &= \log \left\{ \frac{(e^a + 1)(1 + 2e^a)}{(e^a + 2)(1 + e^a)} \right\} \\
 &= \log \frac{(2e^a + 1)}{(e^a + 2)}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(a) = \log \frac{(2e^a + 1)}{(e^a + 2)}$$

(2)

(1)の結果より,  $f(a) = \log \frac{(2e^a + 1)}{(e^a + 2)}$  であるから,

$$f(a) = \log \frac{(e^{-a} + 2)}{(2e^{-a} + 1)}$$

である。ここで,  $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} = 0$  であることから,

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} f(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{(e^{-a} + 2)}{(2e^{-a} + 1)} \right\} \\
 &= \log 2
 \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\log 2$