

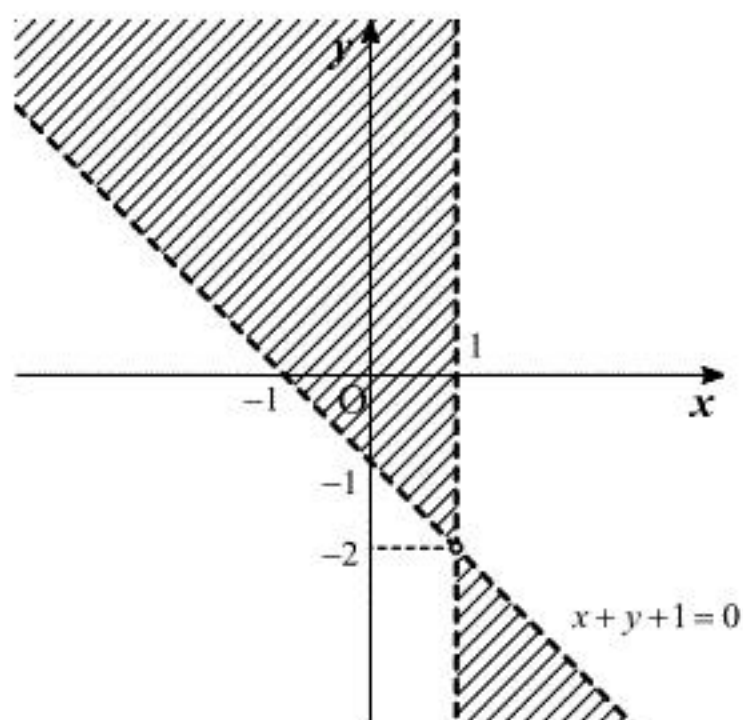
1

(1)

$$(x-1)(x+y+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1 < 0 \text{ かつ } x+y+1 > 0) \text{ または } (x-1 > 0 \text{ かつ } x+y+1 < 0)$$

となるから、不等式は下図斜線部の領域の面積を表す（ただし境界は含まない）。



(答) 前図

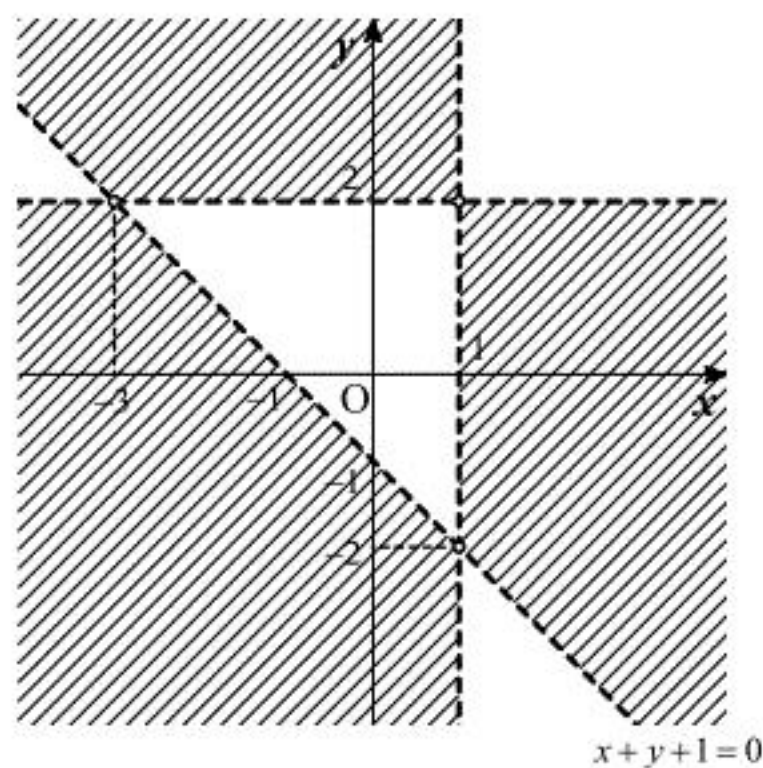
(2)

$$(x-1)(y-2)(x+y+1) < 0$$

について各項の正負を考えると、不等式を満たす正負の組み合わせは下図の通りである。

$x-1$	+	-	+	-
$y-2$	+	+	-	-
$x+y+1$	-	+	+	-

よって求める領域は下図斜線部である（ただし境界はすべて含まない）。



(答) 前図

取り出した3個の玉のなかに白玉が入っていない確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{n+4}C_3} = \frac{24}{(n+4)(n+3)(n+2)}$$

となる。この場合の余事象の確率が、取り出した3個の玉のなかに白玉が入っている確率であるから、 n が求める値のとき

$$\begin{aligned}\frac{24}{(n+4)(n+3)(n+2)} &= 1 - \frac{20}{21} \\ &= \frac{1}{21}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (n+4)(n+3)(n+2) = 24 \cdot 21$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}24 \cdot 21 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ &= 9 \cdot 8 \cdot 7\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}(n+4)(n+3)(n+2) &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \\ \Leftrightarrow n &= 5\end{aligned}$$

となる。よって求める n の値は5である。

P は $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから、実数 θ を用いて $P(\cos \theta, \sin \theta)$ とおける。このとき

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= \left\{ \cos^2 \theta + (\sin \theta - 2)^2 \right\} + \left\{ (\cos \theta - 2)^2 + (\sin \theta - 2)^2 \right\} \\ &= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 8\sin \theta - 4\cos \theta + 12 \\ &= -4\sqrt{5} \cos(\theta - \alpha) + 14 \end{aligned}$$

と変形できる。ただし α は

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす実数である。ここから、 $\theta - \alpha = \pi \Leftrightarrow \theta = \alpha + \pi$ のときに最大値

$$14 + 4\sqrt{5}$$

をとることがわかり、 $\textcircled{1}$ より P の座標は

$$\begin{aligned} (\cos(\pi + \alpha), \sin(\pi + \alpha)) &= (-\cos \alpha, -\sin \alpha) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

となる。また、 $AP^2 + BP^2$ は $\theta = \alpha$ のときに最小値

$$14 - 4\sqrt{5}$$

をとることがわかり、 $\textcircled{1}$ より P の座標は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } 14 + 4\sqrt{5}, \text{ P の座標: } \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\text{最小値: } 14 - 4\sqrt{5}, \text{ P の座標: } \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

(1)

$f(x)$ が極大値と極小値を持つ条件は、方程式

$$f'(x)=0$$

が異なる 2 つの実数をもつことである。ここで

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

から、2 次方程式

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2ax+b=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が異なる 2 つの解をもつとき、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3b > 0$$

となり、これが求める条件である。

(答) $a^2 - 3b > 0$

(2)

①式の 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって $f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値を、 $x=\beta$ で極小値をとる。①式について解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{2a}{3} \\ \alpha\beta = \frac{b}{3} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}(\alpha + \beta) \\ b = 3\alpha\beta \end{cases} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 に等しいから

$$f(\alpha) - f(\beta) = 4$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^3 - \beta^3) + a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 4$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta) \{ (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + a(\alpha + \beta) + b \} = 4$$

となるが、③式から

$$(\alpha - \beta) \left\{ (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)^2 + 3\alpha\beta \right\} = 4$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta) \left(-\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\beta - \frac{\beta^2}{2} \right) = 4$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^3 = -8$$

$$\therefore \alpha - \beta = -2 \quad (\because \alpha < \beta)$$

となる。したがって、上式と②式より

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{3}b$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3b = 9 \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。また、

$$f(4) = 4$$

$$\Leftrightarrow 16a + 4b + 64 = 4$$

$$\Leftrightarrow b = -4a - 15 \quad \cdots \textcircled{5}$$

であるから、④式に⑤式を代入すると

$$a^2 + 12a + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 6)^2 = 0$$

$$\therefore a = -6$$

となり、⑤式より

$$b = 9$$

となる。これは $a^2 - 3b > 0$ を満たすため、求める a, b の値は $(a, b) = (-6, 9)$ である。

(答) $(a, b) = (-6, 9)$