

$$1 < \log_3 5$$

$$0 < \log_5 3 < 1$$

$$\sin 350^\circ < 0$$

$$0 < \sqrt{\frac{3}{5}} < 1$$

より、これらの数のうち最も大きい数は $\log_3 5$ であり、最も小さい数は $\sin 350^\circ$ である。また、対数関数の底の変換公式を用いると、

$$\begin{aligned}\log_5 3 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} \\ &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} \frac{10}{2}} \\ &= \frac{\log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2} \\ &= \frac{0.48}{0.70}\end{aligned}$$

より、

$$(\log_5 3)^2 = \frac{0.2304}{0.49} < \frac{0.294}{0.49} = \frac{3}{5}$$

であるから、

$$\log_5 3 < \sqrt{\frac{3}{5}}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \sin 350^\circ, \log_5 3, \sqrt{\frac{3}{5}}, \log_3 5$$

(1)

1回の試行で左から順に3, 2, 1の玉が並ぶのは, 1と3の玉が選ばれたときである。2つの玉の選び方は ${}_3C_2 = 3$ 通りあるから, 求める確率は

$$\frac{1}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

1回目の試行で選ばれた玉で場合分けをする。

[1] 1回目の試行で1と3の玉が選ばれたとき

このとき, 1回の試行後, 左から順に3, 2, 1の玉が並んでいる。左から順に3, 2, 1の玉が並んでいるとき, どの2つの玉を選んでも, 選ばれた玉のうち左側の玉に書かれた数の方が右側の玉に書かれた数より大きいので, その後の試行で玉の並び方が変わることはない。よってこのとき, 試行を3回繰り返した後も, 左から順に3, 2, 1の玉が並んでいる。

[2] 1回目の試行で1と2の玉が選ばれたとき

このとき, 1回の試行後, 左から順に2, 1, 3の玉が並んでいる。このとき, 2回目と3回目の試行で選ばれる玉と, 試行を3回繰り返した後の玉の並び順は次表のようになる。

2回目の試行で選ばれる玉	3回目の試行で選ばれる玉	3回繰り返した後の並び順
1と2	1と2	2, 1, 3
1と2	1と3	2, 3, 1
1と2	2と3	3, 1, 2
1と3	1と2	2, 3, 1
1と3	1と3	2, 3, 1
1と3	2と3	3, 2, 1
2と3	1と2	3, 2, 1
2と3	1と3	3, 1, 2
2と3	2と3	3, 1, 2

これらの事象は同様に確からしく起こることに注意すると, このとき, 試行を3回繰り返した後, 左から順に3, 2, 1の玉が並ぶ確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$$

である。

[3] 1回目の試行で2と3の玉が選ばれたとき

このとき, 1回の試行後, 左から順に1, 3, 2の玉が並んでいる。このとき, 2回目と3回目の試行で選ばれる玉と, 試行を3回繰り返した後の玉の並び順は次表のようになる。

2回目の試行で選ばれる玉	3回目の試行で選ばれる玉	3回繰り返した後の並び順
1と2	1と2	2, 3, 1
1と2	1と3	2, 3, 1
1と2	2と3	3, 2, 1
1と3	1と2	3, 2, 1
1と3	1と3	3, 1, 2
1と3	2と3	3, 1, 2
2と3	1と2	2, 3, 1
2と3	1と3	3, 1, 2
2と3	2と3	1, 3, 2

これらの事象は同様に確からしく起こることに注意すると, このとき, 試行を3回繰り返した後, 左から順に3, 2, 1の玉が並ぶ確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$$

である。

以上, [1], [2], [3]より, 求める確率は,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27}$$

である。

(答) $\frac{13}{27}$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

のとき、常に $x^2 + ax + 1 > 0$ が成り立つような a を求めればよい。すなわち、

$$f(x) = x^2 + ax + 1$$

として、 $1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値が正となる a の範囲を求める。ここで、

$$x^2 + ax + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}$$

より、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = -\frac{a}{2}$ である。

$$[1] \quad 2 < -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a < -4 \text{ のとき}$$

このとき、 $1 \leq x \leq 2$ において $f(x)$ が最小値をとるのは $x = 2$ のときであり、これが正となるのは

$$f(2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2a + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow a > -\frac{5}{2}$$

のときであるが、これは $a < -4$ に反し不適である。

$$[2] \quad 1 < -\frac{a}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq a < -2 \text{ のとき}$$

このとき、 $1 \leq x \leq 2$ において $f(x)$ が最小値をとるのは $x = -\frac{a}{2}$ のときであり、これが正

となるのは

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a^2}{4} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+2) < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < a < 2$$

のときであるが、これは $-4 \leq a < -2$ に反し不適である。

$$[3] \quad -\frac{a}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq a \text{ のとき}$$

このとき、 $1 \leq x \leq 2$ において $f(x)$ が最小値をとるのは $x = 1$ のときであり、これが正となるのは

$$f(1) > 0$$

$$\Leftrightarrow a + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < a$$

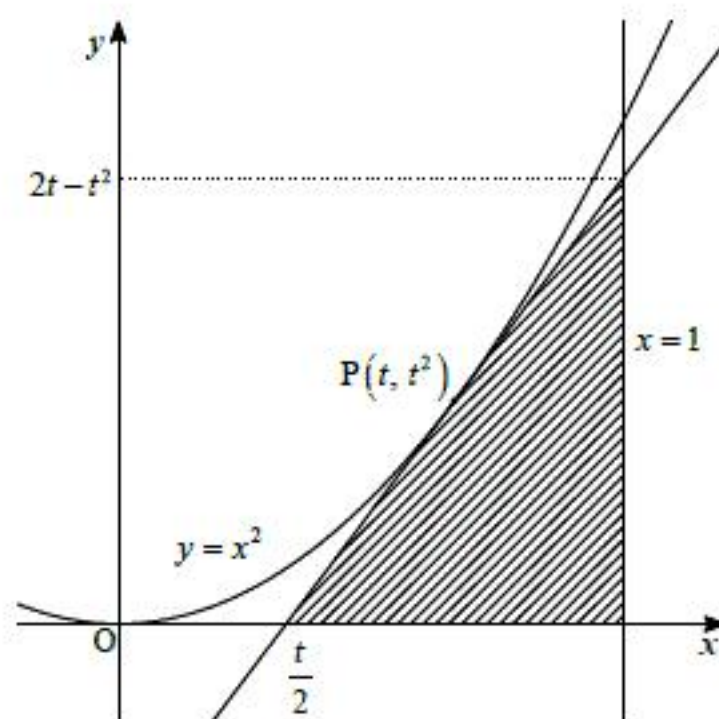
のときであり、これは $-2 \leq a$ を満たす。

以上、[1], [2], [3]より、求める範囲は

$$-2 < a$$

である。

(答) $-2 < a$



$y = x^2$ のとき $y' = 2x$ であるから、 L の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - t) + t^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

である。よって

$$2t \cdot 1 - t^2 = 2t - t^2$$

より L と直線 $x = 1$ の交点の y 座標は $2t - t^2$ であり、

$$\begin{aligned} 2tx - t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{t}{2} \quad (\because t \neq 0) \end{aligned}$$

より L と x 軸の交点の x 座標は $\frac{t}{2}$ である。よって L と直線 $x = 1$ と x 軸とで囲まれる三角形の面積を $S(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot (2t - t^2) \\ &= \frac{t^3}{4} - t^2 + t \end{aligned}$$

となり、これを t で微分すると

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{3}{4}t^2 - 2t + 1 \\ &= \frac{1}{4}(3t - 2)(t - 2) \end{aligned}$$

となる。よって $0 < t \leq 1$ における $S(t)$ の増減は次表のようになる。

t	(0)	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$S'(t)$		+	0	-	-
$S(t)$		↗	極大	↘	

よって L と直線 $x = 1$ と x 軸とで囲まれる三角形の面積は $t = \frac{2}{3}$ において最大値

$$S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

をとる。

(答) 最大値 $\frac{8}{27}$ ，最大値を与える $t = \frac{2}{3}$