

1

(1)

得点が3となるのは、 $a+b=3$ のとき、または

$$\frac{a+b}{2}=3 \Leftrightarrow a+b=6$$

かつコインを投げて表が出たときである。 $a+b=3$ となるのは、

$$(a, b) = (1, 2), (2, 1)$$

のときであり、 $a+b=6$ となるのは、

$$(a, b) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

のときであるから、求める確率は、

$$\frac{2}{6^2} + \frac{5}{6^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

(答) $\frac{1}{8}$

(2)

得点が4となるのは、

$$\frac{a+b}{2}=4 \Leftrightarrow a+b=8$$

かつコインを投げて表が出たときである。 $a+b=8$ となるのは、

$$(a, b) = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

のときであるから、求める確率は、

$$\frac{5}{6^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{72}$$

である。

(答) $\frac{5}{72}$

(3)

余事象である、得点が偶数となる確率を考える。得点が偶数となる事象は、

$a+b$ が偶数かつコインを投げて裏がでたとき

または

$\frac{a+b}{2}$ が偶数、すなわち $a+b$ が4の倍数かつコインを投げて表がでたとき

という2つの排反な事象に分けられる。(1), (2)と同様に、 $a+b$ が偶数になる確率を求めると次表のようになる。

$a+b=2$	$\frac{1}{36}$
$a+b=4$	$\frac{3}{36}$
$a+b=6$	$\frac{5}{36}$
$a+b=8$	$\frac{5}{36}$
$a+b=10$	$\frac{3}{36}$
$a+b=12$	$\frac{1}{36}$

よって得点が偶数となる確率は、

$$\left(\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} \right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

であるから、得点が奇数となる確率は

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

である。

(答) $\frac{5}{8}$

(1)

 $3x+2$ の正負で場合分けをして考える。

$$[1] \quad 3x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3} \text{ のとき}$$

このとき,

$$|3x+2| = -3x-2$$

であり,

$$-3x-2 < x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -3, -1 < x$$

より, $x < -\frac{2}{3}$ において与えられた不等式を満たす x の範囲は

$$x < -3, -1 < x < -\frac{2}{3}$$

である。

$$[2] \quad 3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3} \text{ のとき}$$

このとき,

$$|3x+2| = 3x+2$$

であり,

$$3x+2 < x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \{x - (1-\sqrt{2})\} \{x - (1+\sqrt{2})\} > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$$

であり,

$$2 < \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} < \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{2} > 1-\frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

より, $x \geq -\frac{2}{3}$ において与えられた不等式を満たす x の範囲は

$$-\frac{2}{3} \leq x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$$

である。

以上, [1], [2]より, 求める範囲は

$$x < -3, -1 < x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$$

である。

$$(\text{答}) \quad x < -3, -1 < x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x$$

(2)

$$f(n) = \frac{3n+2}{n^2+n+1}$$

とおく。 n が整数のとき,

$$|3n+2| \neq 0$$

$$n^2+n+1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であることに注意すると,

$$|3n+2| < n^2+n+1$$

のとき,

$$0 < \frac{|3n+2|}{n^2+n+1} < 1$$

より, $f(n)$ は整数とならない。よって

$$|3n+2| \geq n^2+n+1$$

となる n について調べればよい。(1)の結果より,

$$|3n+2| \geq n^2+n+1$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq n \leq -1, 1-\sqrt{2} \leq n \leq 1+\sqrt{2}$$

$$\therefore n = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

であり,

$$f(-3) = \frac{3 \cdot (-3) + 2}{(-3)^2 + (-3) + 1} = -1$$

$$f(-2) = \frac{3 \cdot (-2) + 2}{(-2)^2 + (-2) + 1} = -\frac{4}{3}$$

$$f(-1) = \frac{3 \cdot (-1) + 2}{(-1)^2 + (-1) + 1} = -1$$

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0 + 2}{0^2 + 0 + 1} = 2$$

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1 + 2}{1^2 + 1 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2 + 2}{2^2 + 2 + 1} = \frac{8}{7}$$

より, 求める n は $-3, -1, 0$ である。

$$(\text{答}) \quad n = -3, -1, 0$$

背理法を利用して、 $\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ は無理数であることを示す。すなわち、 $\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ が有理数であると仮定して矛盾を導く。

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} 6$$

であり、これが有理数であることから、ある自然数 a 、および整数 b を用いて

$$\log_{10} 6 = \frac{b}{a}$$

と表せる。このとき、

$$\log_{10} 6 = \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow 10^{\frac{b}{a}} = 6$$

$$\Leftrightarrow 10^b = 6^a$$

$$\Leftrightarrow 2^b \cdot 5^b = 2^a \cdot 3^a$$

となる。ここで、2と3、および2と5は互いに素であることから、この等式が成り立つには

$$2^a = 2^b \Leftrightarrow a = b$$

を満たすことが必要条件となるが、このとき

$$5^a = 3^a$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

となり、 a が自然数という仮定に反する。以上より、 $\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ は無理数であることが示された。

(証明終)

点Pの座標を (t, t^2) とおくと、

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

より、 L_1 の傾きは $2t$ である。また、 L_2 と C_2 の接点の座標を $(s, 2s^2+1)$ とおくと、

$$y = 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x$$

より、 L_2 の方程式は

$$y = 4s(x-s) + 2s^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = 4sx - 2s^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、これが L_1 と平行であることから、

$$2t = 4s$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{t}{2}$$

である。これを①に代入すると

$$y = 2tx - \frac{t^2}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2tx - y - \frac{t^2}{2} + 1 = 0$$

となるから、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} l &= \frac{\left| 2t \cdot t - 1 \cdot t^2 - \frac{t^2}{2} + 1 \right|}{\sqrt{(2t)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{t^2 + 2}{2\sqrt{4t^2 + 1}} \\ &= \frac{4t^2 + 1}{8\sqrt{4t^2 + 1}} + \frac{7}{8\sqrt{4t^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{4t^2 + 1}}{8} + \frac{7}{8\sqrt{4t^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。相加相乗平均の不等式より、

$$\frac{\sqrt{4t^2 + 1}}{8} + \frac{7}{8\sqrt{4t^2 + 1}} \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{4t^2 + 1}}{8} \cdot \frac{7}{8\sqrt{4t^2 + 1}}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

であり、等号成立は

$$\frac{\sqrt{4t^2 + 1}}{8} = \frac{7}{8\sqrt{4t^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow t = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

のときである。よってこのとき、 l は最小値 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ をとる。