

(1)

$x^2 + ax + bc = 0$ の判別式を D とすると、2 つの解が実数である条件は

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4bc \geq 0$$

である。以下、 c の値によって場合分けをする。

[1] $c = -1$ のとき

$a > 0, b > 0$ であるから、

$$a^2 + 4b > 0$$

が常に成立する。したがって、任意の (a, b) に対して成り立つ。

[2] $c = 1$ のとき

$a^2 - 4b \geq 0$ となる (a, b) は、

$$(2, 1),$$

$$(3, 1), (3, 2),$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4),$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

の 19 通り存在する。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{6^2} = \frac{55}{72}$$

となる。

(答) $\frac{55}{72}$

(2)

(1)の条件が成立するとき、 $x^2 + ax + bc = 0$ の解は

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$$

であるから、 $\alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$ とおく。また、 $f(x) = x^2 + ax + bc$ とおく。

以下、 c の値によって場合分けをして考える。

[1] $c = -1$ のとき

$f(0) = -b (< 0)$ であるから、2 つの解は $\alpha < 0 < \beta$ となっている。したがって、 $|\alpha| + |\beta|$ は

$$|\alpha| + |\beta| = -\alpha + \beta = \sqrt{a^2 + 4b}$$

である。これが整数になる (a, b) の組み合わせは、

$$(1, 2), (1, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$$

の 6 通り存在する。

[2] $c = 1$ のとき

$f(x)$ の軸は $x = -\frac{a}{2} (< 0)$ である。また $f(0) = b (> 0)$ であるから、(1)の条件が成立するとき

$$\alpha \leq \beta < 0$$

となる。したがって、 $|\alpha| + |\beta|$ は

$$|\alpha| + |\beta| = -\alpha - \beta = a$$

となり、整数になる。したがって、条件を満たす (a, b) は(1)より 19 通り存在する。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{6^2} = \frac{25}{72}$$

となる。

(答) $\frac{25}{72}$

真数条件と底の条件より,

$$x > 0, x \neq 1$$

である。両辺について、底が3の対数をとると,

$$\begin{aligned} \log_3 \left(\frac{x^2}{3} \right)^{\log_3 x} &= \log_3 (9x^5)^{\log_x 3} \\ \Leftrightarrow (\log_3 x)(2\log_3 x - 1) &= (\log_x 3)(2 + 5\log_3 x) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $t = \log_3 x$ とおくと、 $x \neq 1$ より $t \neq 0$ であるから、 $\log_x 3 = \frac{1}{t}$ より

$$\begin{aligned} (\log_3 x)(2\log_3 x - 1) &= (\log_x 3)(2 + 5\log_3 x) \\ \Leftrightarrow t(2t - 1) &= \frac{1}{t}(2 + 5t) \\ \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 5t - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 1)(2t + 1)(t - 2) &= 0 \\ \therefore t &= -1, -\frac{1}{2}, 2 \end{aligned}$$

が得られる。したがって、求める x の値は、 $x = 3^t$ より

$$x = \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 9$$

となる。これらは、確かに $x > 0, x \neq 1$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 9$$

(1)

$f(x)$ を x について微分すると、

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

となる。したがって、増減表は以下のようになる。

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{1}{e}$	

したがって、最大値は $\frac{1}{e}$ となり、 $x=e$ となる。

(答) 最大値 $\frac{1}{e}(x=e)$

(2)

$f'(x)$ を x について微分すると、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2 \log x - 3}{x^3} \end{aligned}$$

となる。したがって、増減表は以下のようになる。

x	0	...	e	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$			$\frac{1}{e}$		$\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	

したがって、変曲点の座標は $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ となる。

(答) $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$

(3)

$\int_1^n f(x)dx$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x)dx &= \int_1^n \log x (\log x)' dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^n \\ &= \frac{1}{2} (\log n)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 n は自然数であるから $\log n \geq 0$ である。このことに注意すると、

$\int_1^n f(x)dx > 2$ となるのは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\log n)^2 &> 2 \\ \Leftrightarrow \log n &> 2 \\ \Leftrightarrow n &> e^2 \end{aligned}$$

のときである。ここで

$$\begin{aligned} 2.7^2 &< e^2 < 2.8^2 \\ \Leftrightarrow 7.29 &< e^2 < 7.84 \end{aligned}$$

だから、最小の自然数 n は $n=8$ である。

(答) $n=8$

(1)

$z = x + iy$ より, $\bar{z} = x - iy$ である。これを $|z - ia| = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ に代入すると,

$$\begin{aligned} |z - ia| &= \frac{2iy}{2i} \\ \Leftrightarrow |x + i(y - a)| &= y \end{aligned}$$

が得られる。したがって, $y \geq 0$ である。このとき両辺を2乗して

$$\begin{aligned} x^2 + (y - a)^2 &= y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ay + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。 $a > 0$ より

$$y = \frac{x^2 + a^2}{2a}$$

となる。これは $y \geq 0$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{x^2 + a^2}{2a}$$

(2)

$|z - (2 + 2i)| = |z + (2 + 2i)|$ に $z = x + iy$ を代入して, 両辺を2乗すると,

$$\begin{aligned} |z - (2 + 2i)|^2 &= |z + (2 + 2i)|^2 \\ \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 2)i|^2 &= |(x + 2) + (y + 2)i|^2 \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \\ \Leftrightarrow y &= -x \end{aligned}$$

が得られる。これは C 上の点でもあるので, (1)の結果より $y = \frac{x^2 + a^2}{2a}$ と連立して,

$$\begin{aligned} -x &= \frac{x^2 + a^2}{2a} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + a)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -a \end{aligned}$$

が得られる。したがって, $(x, y) = (-a, a)$ となるから, 求める z は

$$z = -a + ai$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z = -a + ai$$

(1)

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる。また、 $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる。また、 $\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)の続きを計算すると、

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 64 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、自然数 m に対し、 $n=2m-1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_{2m-1} \\ y_{2m-1} \end{pmatrix} = 4^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と推定される。以下、数学的帰納法により、 $\begin{pmatrix} x_{2m-1} \\ y_{2m-1} \end{pmatrix} = 4^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となることを証明する。

[1] $m=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 4^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、 $m=1$ のときの成立が示された。

[2] $m=k$ (k は自然数)のとき

$$\begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ y_{2k-1} \end{pmatrix} = 4^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となることを仮定する。このとき $\begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix}$ は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ y_{2k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4^{k-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4^{k-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。また、 $\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix}$ は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \left\{ 4^{k-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4^{k-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4^{k-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $m=k+1$ のときの成立が示された。

以上[1][2]より、 $n=2m-1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_{2m-1} \\ y_{2m-1} \end{pmatrix} = 4^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となることが示された。また、 $n=2m$ のとき

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{2m} \\ y_{2m} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2m-1} \\ y_{2m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4^{m-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4^{m-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 2^{2m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる。以上より、一般項 x_n, y_n は n が奇数のとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、 n が偶数のとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n \text{ が奇数のとき } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \text{ が偶数のとき } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$