

〔解答〕

$$(1) \quad 19n^3 + 32n^2 + 12n - 1 \quad (2) \quad 44 \text{ 桁}$$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=2n}^{3n} (3k^2 + 5k - 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{3n} (3k^2 + 5k - 1) - \sum_{k=1}^{2n-1} (3k^2 + 5k - 1) \\
 &= 3 \cdot \frac{3n(3n+1)(6n+1)}{6} + 5 \cdot \frac{3n(3n+1)}{2} - 3n - 3 \cdot \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} - 5 \cdot \frac{(2n-1)2n}{2} + (2n-1) \\
 &= \frac{(54n^3 + 27n^2 + 3n) + (45n^2 + 15n) - (16n^3 - 12n^2 + 2n) - (20n^2 - 10n)}{2} - (n+1) \\
 &= \frac{38n^3 + 64n^2 + 26n}{2} - (n+1) \\
 &= 19n^3 + 32n^2 + 13n - (n+1) \\
 &= 19n^3 + 32n^2 + 12n - 1
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

一般に a が n 桁の数のとき、 $10^{n-1} \leq a < 10^n$ である。したがって、

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 12^{40} &= 40 \log_{10} 12 \\
 &= 40(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\
 &= 40(2 \cdot 0.301 + 0.477) \\
 &= 40 \cdot 1.079 \\
 &= 43.16
 \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{aligned}
 10^{n-1} &\leq 12^{40} < 10^n \\
 \Leftrightarrow n-1 &\leq \log_{10} 12^{40} < n \\
 \Leftrightarrow n-1 &\leq 43.16 < n
 \end{aligned}$$

となり、これに当てはまる整数 n は 44 である。よって 12^{40} は 44 桁の数である。

(1)

a_1 から a_6 の番号のとり方は

$$6! = 720 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。次に、 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$ となるような場合の数を求める。 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = k$ とおくと、

$$\sum_{n=1}^6 a_n = 3k$$

$$\Leftrightarrow 21 = 3k$$

$$\Leftrightarrow k = 7$$

であることがわかるから、

$$\{a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6\} = \{1+6, 2+5, 3+4\}$$

となるような場合の数を求めればよい。これは、 $1+6, 2+5, 3+4$ の並び方で $3! = 6$ 通りであり、また a_1 と a_2 , a_3 と a_4 , a_5 と a_6 の前後の並び順で $2^3 = 8$ 通りあるため、

$$6 \cdot 8 = 48 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$

となる。

(答) $\frac{1}{15}$

(2)

720 通りある a_1 から a_6 の数値の並び方のうち、 a_6 が偶数となる並び方は、 a_6 が偶数となるのが 2, 4, 6 の 3 通りであり、あとの数字の並び方が $5!$ 通りであることから、

$$3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360 \text{ (通り)}$$

である。また、 a_6 が偶数かつ a_1 が奇数となる並び方は、 a_6 が偶数となるのが 2, 4, 6 の 3 通り、 a_1 が奇数となるのが 1, 3, 5 の 3 通りであり、あとの数字の並び方が $4!$ 通りであることから、

$$3 \cdot 3 \cdot 4! = 3 \cdot 3 \cdot 24 = 216 \text{ (通り)}$$

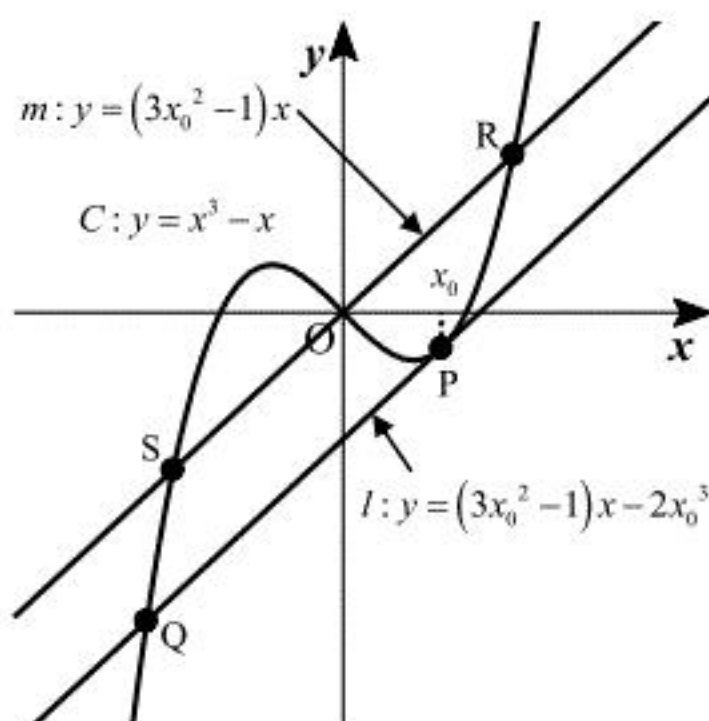
である。したがって、求める確率は

$$\frac{216}{360} = \frac{3}{5}$$

である。

(答) $\frac{3}{5}$

(1)



曲線 $C: y = x^3 - x$ において,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

であるから、点 P の x 座標を x_0 ($\neq 0$) とおくと直線 l の傾きは $3x_0^2 - 1$ である。直線 l と直線 m は平行であるため、直線 m の傾きも同じく $3x_0^2 - 1$ である。直線 m は原点を通るため、直線 m の式は

$$m: y = (3x_0^2 - 1)x$$

と表せる。このとき、直線 m と曲線 C の式を連立させ、 y を消去すると

$$\begin{aligned} x^3 - x &= (3x_0^2 - 1)x \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x_0^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x + \sqrt{3}x_0)(x - \sqrt{3}x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, \pm\sqrt{3}x_0 \end{aligned}$$

となる。点 P は原点とは異なるため $x_0 \neq 0$ であるから、 $\sqrt{3}x_0 \neq 0$ であり、 $0, \pm\sqrt{3}x_0$ の 3 つはすべて異なる値である。よって直線 m と曲線 C は相異なる 3 点で交わる。

(証明終)

(2)

直線 l は $P(x_0, x_0^3 - x_0)$ を通る傾き $3x_0^2 - 1$ の直線であるため、直線 l の式は

$$\begin{aligned} y - (x_0^3 - x_0) &= (3x_0^2 - 1)(x - x_0) \\ \Leftrightarrow y &= (3x_0^2 - 1)x - 2x_0^3 \end{aligned}$$

である。直線 l と曲線 C の式を連立させ、 y を消去すると

$$\begin{aligned} (3x_0^2 - 1)x - 2x_0^3 &= x^3 - x \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - x_0)^2 (x + 2x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= x_0, -2x_0 \end{aligned}$$

である。従って点 Q の x 座標は $-2x_0$ である。よって

$$\begin{aligned} PQ &= |x_0 - (-2x_0)| \sqrt{1 + (3x_0^2 - 1)^2} \\ &= 3|x_0| \sqrt{1 + (3x_0^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

である。また、 R, S の x 座標は $\sqrt{3}x_0, -\sqrt{3}x_0$ (順不同) であるため、

$$\begin{aligned} RS &= |\sqrt{3}x_0 - (-\sqrt{3}x_0)| \sqrt{1 + (3x_0^2 - 1)^2} \\ &= 2\sqrt{3}|x_0| \sqrt{1 + (3x_0^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{RS} &= \frac{3|x_0| \sqrt{1 + (3x_0^2 - 1)^2}}{2\sqrt{3}|x_0| \sqrt{1 + (3x_0^2 - 1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because |x_0| \neq 0) \end{aligned}$$

である。

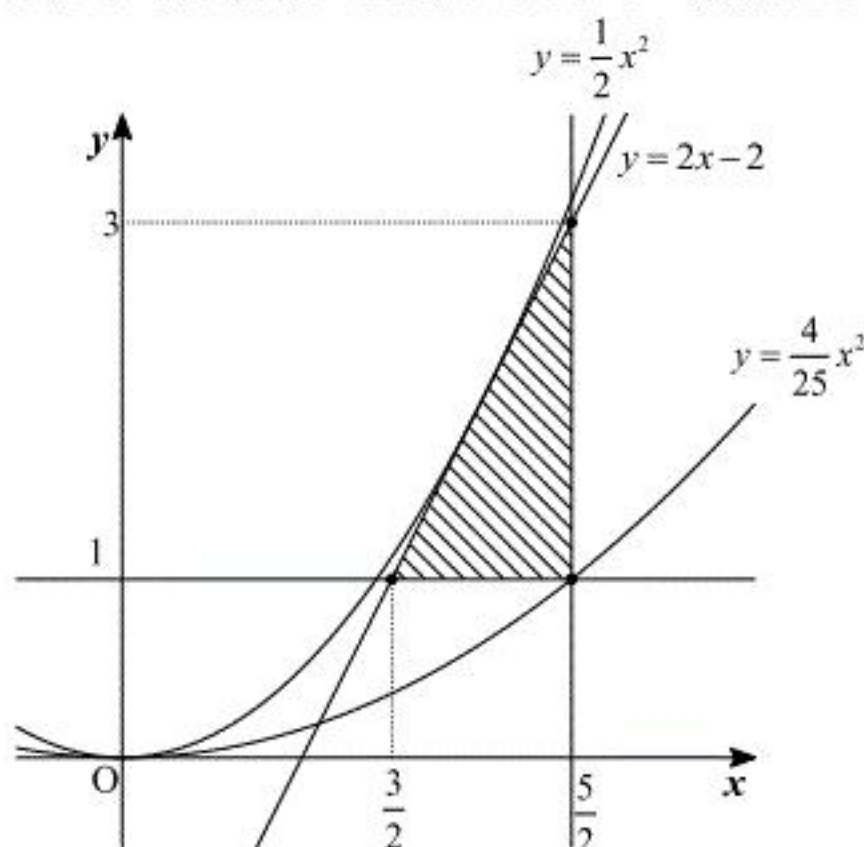
(答) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

与えられた連立不等式を整理すると

$$\begin{cases} 2x - y - 2 \geq 0 \\ x \leq \frac{5}{2} \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2x - 2 \\ x \leq \frac{5}{2} \\ y \geq 1 \end{cases}$$

となるから、この連立方程式の表す領域 D を図示すると以下の斜線部となる。



$\frac{y}{x^2} = k$ と置くと、 $\frac{y}{x^2}$ は放物線 $y = kx^2$ ($x \neq 0$) 上の点 (x, y) で値 k をとる。よって、放物線

$y = kx^2$ と領域 D との位置関係を調べ、共有点を持つときの k の値を求める。図より、 $k > 0$ であり、 $y = kx^2$ と $y = 2x - 2$ が接するときを考えると、 $kx^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow kx^2 - 2x + 2 = 0$ が重解を持つことより、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 2)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 2 \\ y &= 2 \cdot 2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

よりその接点は $(2, 2)$ であり、領域 D の境界上の点である。よって、 $\frac{y}{x^2} = k$ は $(2, 2)$ で最大値

$\frac{1}{2}$ をとる。一方、 $\frac{y}{x^2} = k$ が最小値をとるのは、放物線 $y = kx^2$ が $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ を通るときであり、こ

のとき、最小値 $\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{4}{25}$ をとる。

(答) 最大値 $\frac{1}{2}$, そのとき $P(2, 2)$, 最小値 $\frac{4}{25}$, そのとき $P\left(\frac{5}{2}, 1\right)$