

〔解答〕

(1)	$\frac{5}{18}$	(2)	$\frac{37}{42}$	(3)	$\frac{4}{7}$
-----	----------------	-----	-----------------	-----	---------------

〔解説〕

(1)

9つの玉から4つの玉を同時に取り出す場合の数は

$${}_9C_4 = 126 \text{ (通り)}$$

である。また、白玉以外の7つの玉から4つの玉を同時に取り出す場合の数は

$${}_7C_4 = 35 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{35}{126} = \frac{5}{18}$$

である。

(2)

題意の余事象である、4つの玉の中に青玉が入っていない場合の数は

$${}_6C_4 = 15 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は

$$1 - \frac{15}{126} = \frac{37}{42}$$

である。

(3)

取り出した4つの玉の中にすべての色の玉が入っているとき、いずれか1色の玉が2つ入っており、残り2色の玉は1つだけ入っている。ここで、赤玉が2つ入っている場合の数は

$${}_4C_2 \cdot 3 \cdot 2 = 36 \text{ (通り)}$$

であり、同様に青玉が2つ入っている場合の数は

$$4 \cdot {}_3C_2 \cdot 2 = 24 \text{ (通り)}$$

であり、白玉が2つ入っている場合の数は

$$4 \cdot 3 \cdot {}_2C_2 = 12 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{36+24+12}{126} = \frac{4}{7}$$

である。

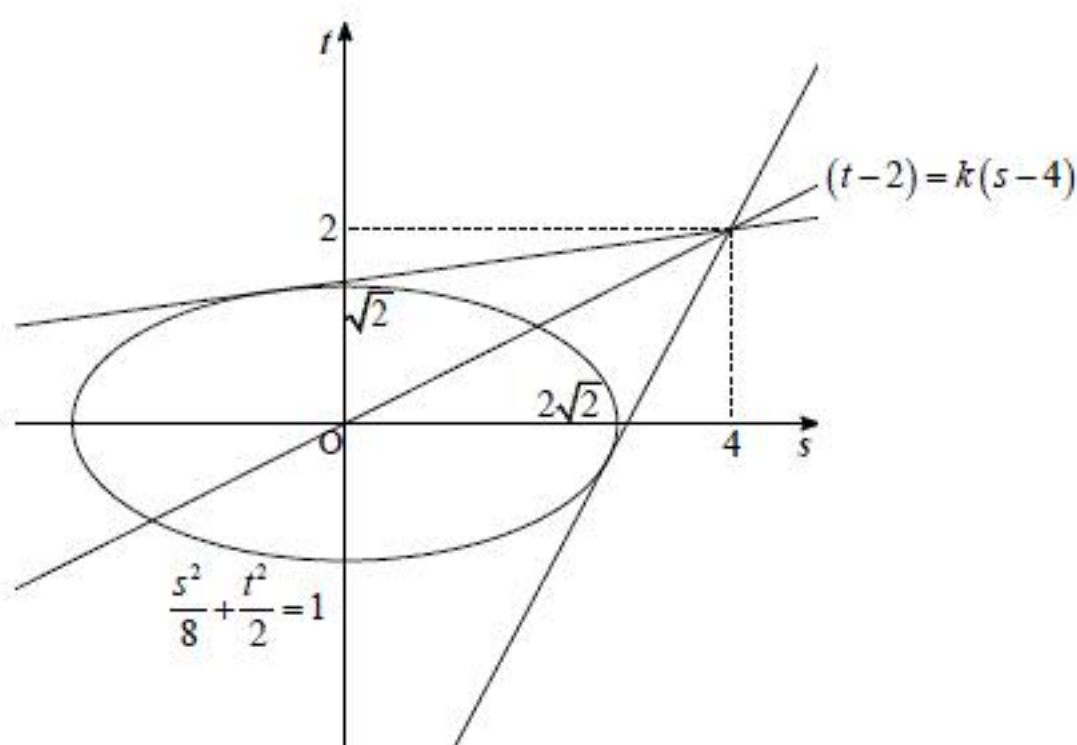
$$\frac{t-2}{s-4}=k \text{ とおくと, } s \neq 4 \text{ より}$$

$$(t-2)=k(s-4) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、点 $P(s, t)$ は楕円 C 上の点であることから、

$$\frac{s^2}{8} + \frac{t^2}{2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。ここで、関係①および②を st 平面上に図示すると、以下のようになる。



①を②に代入し整理すると、

$$\frac{s^2}{8} + \frac{1}{2} \{2 + k(s-4)\}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (4k^2 + 1)s^2 - 16k(2k-1)s + 8(8k^2 - 8k + 1) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

を得る。 s は実数であるから、③の判別式を D とすると $D \geq 0$ となる。したがって、 k の取りうる範囲は

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \{8k(2k-1)\}^2 - (4k^2 + 1) \cdot 8(8k^2 - 8k + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 - 8k + 1 \leq 0$$

$$\therefore \frac{2-\sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

である。ここで、 $k = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ を③に代入し整理すると、

$$(8+4\sqrt{3})s^2 - 8(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) + 8(7+4\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 2(1+\sqrt{3})s + (4+2\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \{s - (1+\sqrt{3})\}^2 = 0$$

$$\therefore s = 1 + \sqrt{3}$$

となり、①にこれを代入すると

$$\begin{aligned} t &= 2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot (1+\sqrt{3}-4) \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める最大値は $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ であり、最大値を与える s, t の値は

$$(s, t) = \left(1 + \sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } \frac{2+\sqrt{3}}{2}, (s, t) = \left(1 + \sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$$

与えられた等式

$$\frac{z-1}{z+1} = \left| \frac{z-1}{z+1} \right| i \quad \dots \textcircled{1}$$

について、 $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \geq 0$ であるから、右辺の実部は0であり、虚部は0以上の実数である。ここ

で、 x, y を実数として $z = x + yi$ とおくと、 $z+1 \neq 0$ より $(x, y) \neq (-1, 0)$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{x+yi-1}{x+yi+1} \\ &= \frac{x-1+yi}{x+1+yi} \cdot \frac{x+1-yi}{x+1-yi} \\ &= \frac{x^2 - (1-yi)^2}{(x+1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 $(x+1)^2 + y^2 > 0$ であることに注意すると、 $\textcircled{1}$ が成り立つためには

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \\ \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} \geq 0 \\ (x, y) \neq (-1, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ かつ } (x, y) \neq (-1, 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる必要がある。一方、 x, y が $\textcircled{2}$ を満たすとき、

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i \\ &= \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i \end{aligned}$$

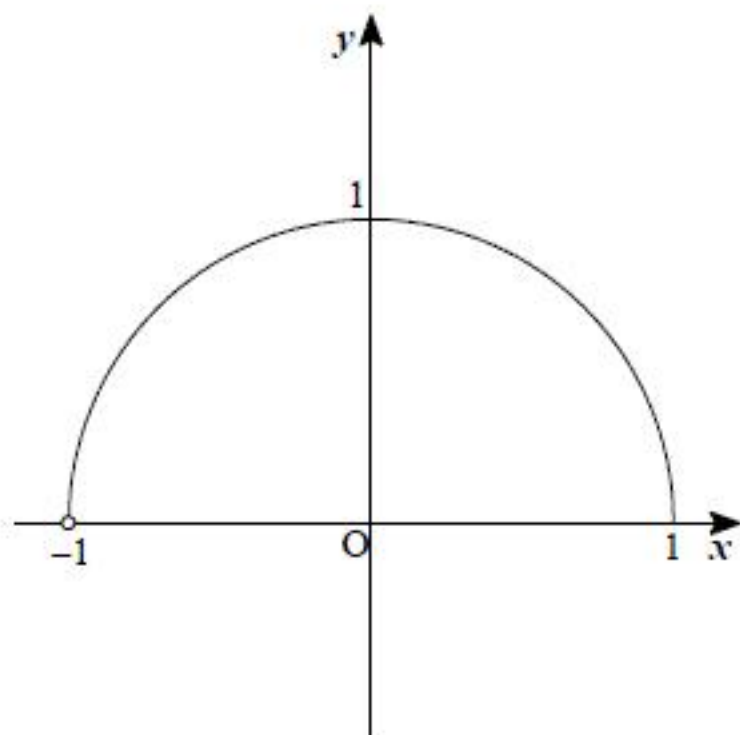
と変形できる。 $\textcircled{2}$ から $y \geq 0$ であり、また $(x+1)^2 + y^2 > 0$ であることから、

$$(\textcircled{1} \text{ の右辺}) = \left| \frac{z-1}{z+1} \right| i = \left| \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i \right| i = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i = (\textcircled{1} \text{ の左辺})$$

となり、 $\textcircled{2}$ が成り立つとき $\textcircled{1}$ も成り立つ。以上より、 $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$ かつ $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1}$ であるから、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2}$$

である。したがって、 $\textcircled{2}$ を図示すると以下のようなになる。ただし、 $(x, y) = (-1, 0)$ を含まず、 $(x, y) = (1, 0)$ を含む。



4

(1)

C の方程式を x で微分すると,

$$y' = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

となる。また

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(∞)
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

したがって、変曲点の座標は $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$ である。

(答) $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$

(2)

C 上の点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$ における接線の方程式 L_1 は

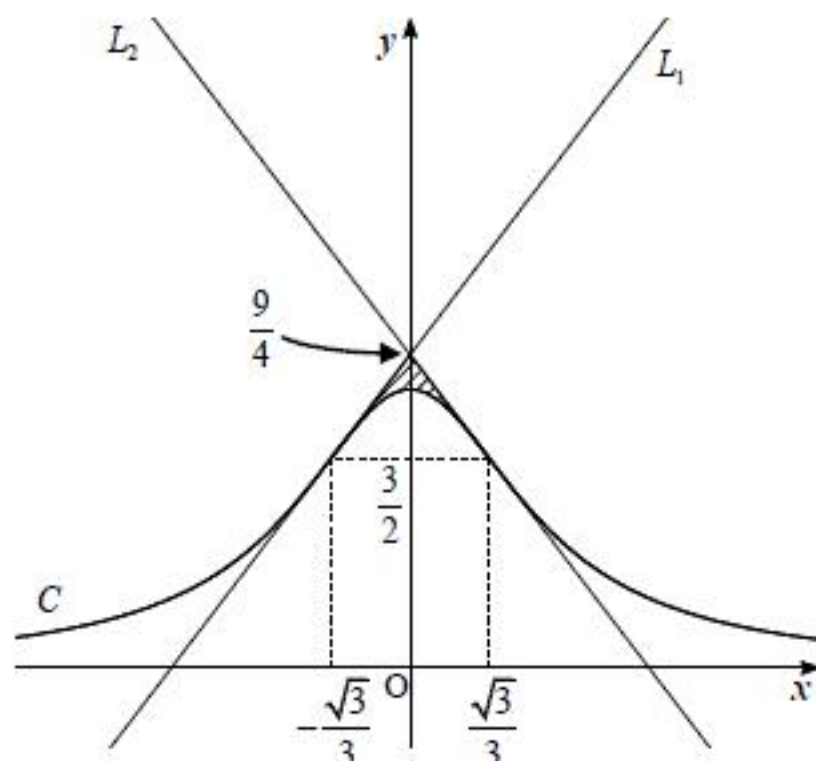
$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}x + \frac{9}{4}$$

となる。同様に、点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$ における接線の方程式 L_2 は

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x + \frac{9}{4}$$

となる。これより、囲まれた部分を図示すると、下図の斜線部分のようになる。



ここで、斜線部分は y 軸に関して対称であるから、求める面積 S は

$$S = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left\{ \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}x + \frac{9}{4} \right) - \frac{2}{x^2+1} \right\} dx$$

$$= 2 \left[-\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{9}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - 4 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} - 4 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{x^2+1} dx$$

である。ここで、 $x = \tan \theta$ と置換すると、

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

であり、積分範囲は以下のように変化する。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

となる。以上より、

$$S = \frac{5\sqrt{3}}{4} - 4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{2\pi}{3}$$

である。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{2\pi}{3}$