

〔解答〕

(1)	$\frac{7}{27}$
(2)	$-\frac{18}{7}$

〔解説〕

(1)

3つのサイコロの目の出方は全部で 6^3 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。ここで、 $S \geq 13$ となるサイコロの目の出方を数える。まず、3つのサイコロの目が全て同じ場合、目の出方は

$$(6, 6, 6), (5, 5, 5)$$

である。したがって、場合の数は2通りとなる。次に2つのサイコロの目が同じ場合、目の出方は

$$(6, 6, 5), (6, 6, 4), (6, 6, 3), (6, 6, 2), (6, 6, 1), \\ (5, 5, 6), (5, 5, 4), (5, 5, 3), \\ (4, 4, 6), (4, 4, 5)$$

である。したがって、場合の数は

$$3 \cdot 10 = 30 \text{ 通り}$$

となる。最後に、サイコロの目が全て違う場合、目の出方は

$$(6, 5, 4), (6, 5, 3), (6, 5, 2), (6, 4, 3)$$

である。したがって、場合の数は

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ 通り}$$

となる。したがって、求める確率は

$$\frac{2+30+24}{6^3} = \frac{7}{27}$$

となる。

(2)

$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ の両辺を2乗すると

$$(\cos x + \sin x)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = -\frac{7}{18} \left(\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \right)$$

となる。したがって、求める値は

$$\begin{aligned} \tan x + \frac{1}{\tan x} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \\ &= -\frac{18}{7} \end{aligned}$$

となる。

(1)

$x^2 - y^2 \geq 0$ を変形すると、

$$x^2 - y^2 \geq 0$$

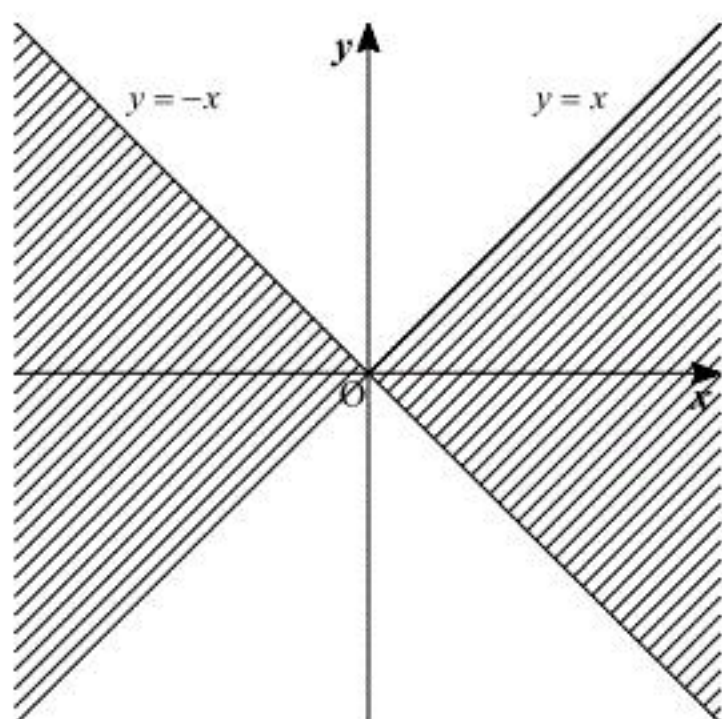
$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) \geq 0$$

が得られる。したがって、与えられた不等式は

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y \leq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -x \leq y \leq x \quad \text{または} \quad x \leq y \leq -x$$

となる。以上より、 $x^2 - y^2 \geq 0$ の定める領域は以下の図の斜線部ようになる。ただし、境界線をすべて含む。

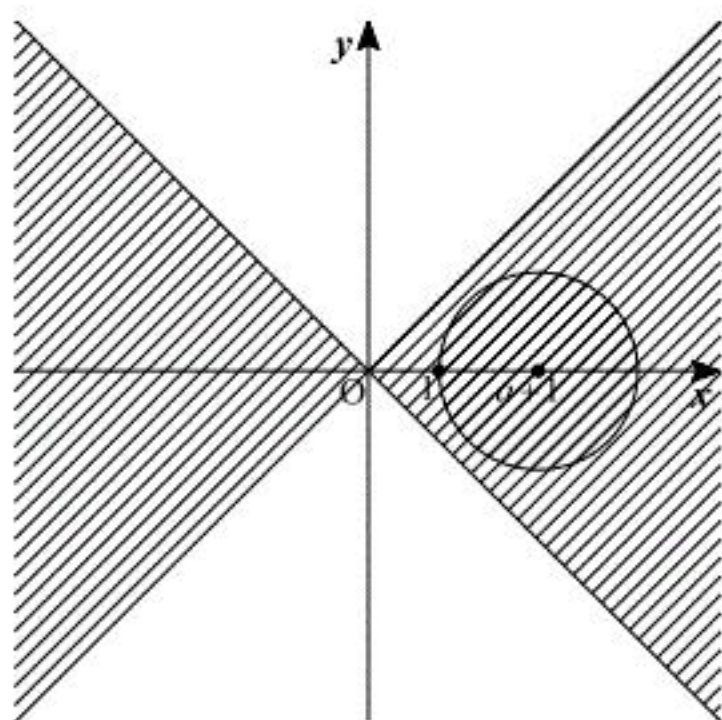


(答) 前図(ただし、境界線をすべて含む)

(2)

$(x-a-1)^2 + y^2 \leq a^2$ は中心が $(a+1, 0)$ 、半径が a の円周とその内部を表している。(A) が成り立つことが (B) が成り立つことの必要条件になるとき、以下の図のように

$(x-a-1)^2 + y^2 \leq a^2$ が (1) で示した領域の内側にあればよい。



$y = x, y = -x$ の対称性と $(x-a-1)^2 + y^2 = a^2$ が x 軸に関して対称であることを考慮すると、

$(x-a-1)^2 + y^2 = a^2$ と $y = x$ が共有点を持たない、または、接する条件を考えればよい。この2式を連立すると、

$$(x-a-1)^2 + x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(a+1)x + 2a+1 = 0$$

が得られる。この方程式の判別式を D とすると、 $D \leq 0$ が求める条件である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+1)^2 - 2(2a+1) \\ &= a^2 - 2a - 1 \end{aligned}$$

となるため、

$$D \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 \leq 0$$

$$\therefore 1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2}$$

が得られる。

(答) $1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2}$

(1)

$\triangle ABC$ の面積を求める式を考えると、

$$\begin{aligned} 18 &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow 18 &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot 12 \quad (\because b \sin A = 12) \\ \therefore c &= 3 \end{aligned}$$

が得られる。また、 $\triangle ABC$ について正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \Leftrightarrow a \sin B &= b \sin A \\ \Leftrightarrow a \sin B &= 12 \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $a \sin B = 12$, $a \cos B = 5$ より、

$$\begin{aligned} a^2 \sin^2 B + a^2 \cos^2 B &= 12^2 + 5^2 \\ \Leftrightarrow a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) &= 169 \\ \therefore a &= 13 \quad (\because a > 0, \sin^2 B + \cos^2 B = 1) \end{aligned}$$

が得られる。次に、 $\triangle ABC$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ \Leftrightarrow b^2 &= 169 + 9 - 2 \cdot 13 \cdot 3 \quad (\because a \cos B = 5) \\ \Leftrightarrow b^2 &= 148 \\ \therefore b &= 2\sqrt{37} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $a = 13, b = 2\sqrt{37}, c = 3$

(2)

(1)の結果を用いて、 $\triangle ABC$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{148 + 9 - 169}{2 \cdot 2\sqrt{37} \cdot 3} \quad (\because a = 13, b = 2\sqrt{37}, c = 3) \\ &= -\frac{\sqrt{37}}{37} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\cos A = -\frac{\sqrt{37}}{37}$

(1)

$y = x^2$ を x について微分すると、

$$y' = 2x$$

が得られる。ここで、接点の座標は $P(t, t^2)$ であるため、接線の傾きは $2t$ である。 $t > 0$ より、

接線に垂直な直線 L の傾きは $-\frac{1}{2t}$ となる。したがって、直線 L の方程式は

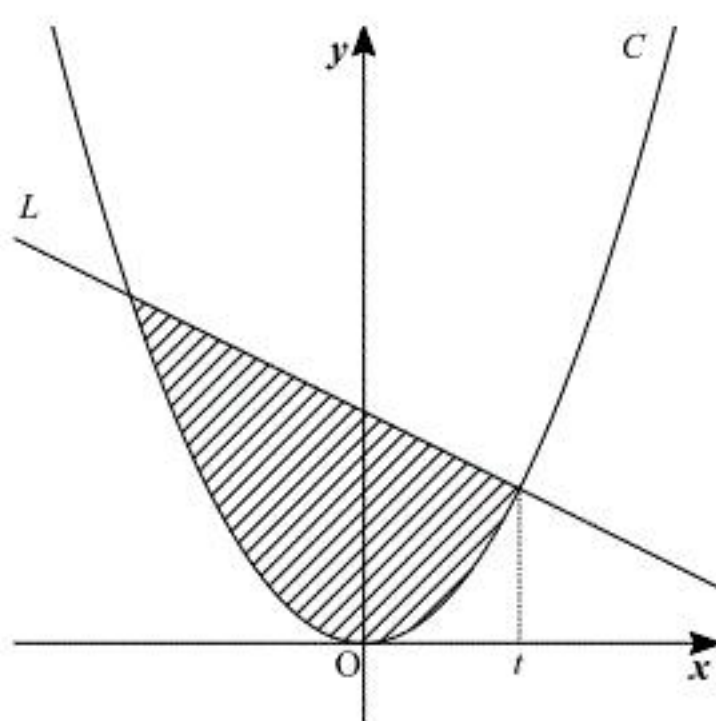
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2 \\ &= -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

(2)

L と C に囲まれた部分は以下の図の斜線部のようになる。



L と C のもう1つの交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2tx^2 + x - t(2t^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)\{2tx + (2t^2 + 1)\} &= 0 \\ \therefore x &= -t - \frac{1}{2t} \quad (\because x \neq t, t > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-t-\frac{1}{2t}}^t \left\{ \left(-\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= -\int_{-t-\frac{1}{2t}}^t \left\{ x - \left(-t - \frac{1}{2t} \right) \right\} (x-t) dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ t - \left(-t - \frac{1}{2t} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(2t + \frac{1}{2t} \right)^3 \end{aligned}$$

となる。 $2t + \frac{1}{2t}$ が最小のとき面積 S も最小となる。 $t > 0$ であるため、相加・相乗平均の関係より、

$$2t + \frac{1}{2t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2t}} = 2$$

が得られる。ただし、等号成立は

$$\begin{aligned} 2t &= \frac{1}{2t} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のときである。以上より、 S は $t = \frac{1}{2}$ のとき、最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } \frac{4}{3} \left(t = \frac{1}{2} \right)$$