

(1)

三角形 ABC は鋭角三角形であり、

$$0 < \angle B < \frac{\pi}{2}$$

を満たすことに注意すると、三角形 ABC について正弦定理を用いることで、

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \Leftrightarrow \frac{2b \sin A}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \Leftrightarrow \sin B &= \frac{1}{2} \\ \therefore \angle B &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \angle B = \frac{\pi}{6}$$

(2)

(1)の結果より、

$$\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、三角形 ABC について余弦定理より、

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ &= 27 + 25 - 45 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\therefore b = \sqrt{7}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad b = \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} &= \frac{1}{6}n(n^2 - 3n + 8) \\ &= n + \frac{1}{6}n(n^2 - 3n + 2) \\ &= n + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $n, n-1, n-2$ は連続する3つの整数であるから、これらのうち少なくとも1つは2の倍数であり、また1つは3の倍数である。よってこれらの積 $n(n-1)(n-2)$ は常に6の倍数であるから、

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

は常に整数となる。これに自然数である n を足しても整数となることは明らかであるから、題意は示された。

(証明終)

〔解答〕

最大値	5
最小値	$-\frac{129}{32}$

〔解説〕

$$\cos x = t$$

とおくと、

$$\begin{aligned} 4\cos 2x - \cos x &= 4(2\cos^2 x - 1) - \cos x \\ &= 8t^2 - t - 4 \\ &= 8\left(t - \frac{1}{16}\right)^2 - \frac{129}{32} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 x が実数全体を動くとき、 t の取りうる範囲は

$$-1 \leq t \leq 1$$

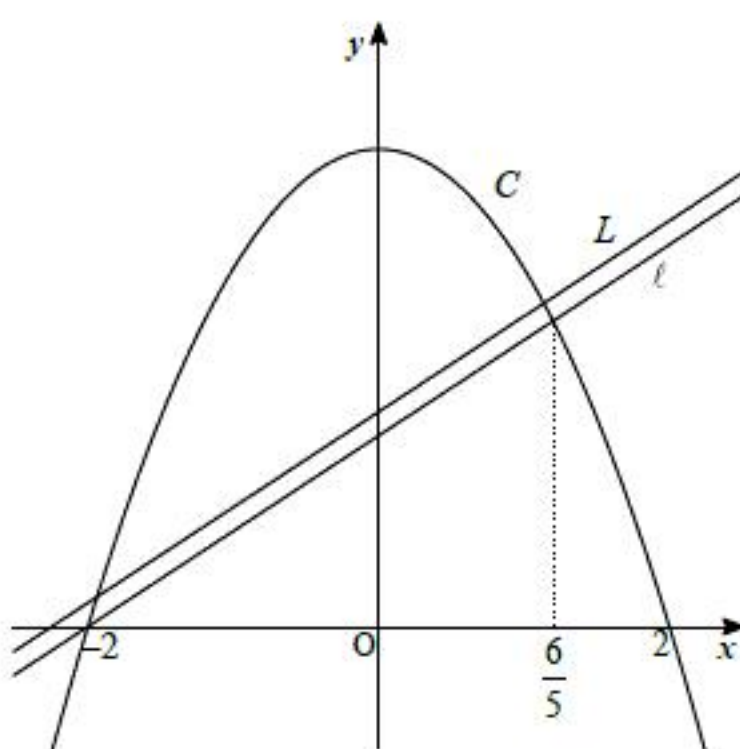
であるから、 $4\cos 2x - \cos x$ は $t = -1$ のとき最大値

$$8(-1)^2 - (-1) - 4 = 5$$

をとり、また $t = \frac{1}{16}$ のとき最小値

$$-\frac{129}{32}$$

をとる。



(1)

C と x 軸の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} 4-x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (4-x^2) dx \\ &= -\int_{-2}^2 (x-2)\{x-(-2)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \{2-(-2)\}^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{32}{3}$

(2)

点 $(-2, 0)$ を通り傾きが $\frac{4}{5}$ である直線を ℓ とおくと, ℓ の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{5} \{x-(-2)\} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} \end{aligned}$$

であり, ℓ と C の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 4-x^2 &= \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)\left(x-\frac{6}{5}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, \frac{6}{5} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} T &= \int_{-2}^{\frac{6}{5}} \left\{ 4-x^2 - \left(\frac{4}{5}x + \frac{8}{5} \right) \right\} dx \\ &= -\int_{-2}^{\frac{6}{5}} \left(x - \frac{6}{5} \right) \{x-(-2)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{6}{5} - (-2) \right\}^3 \\ &= \frac{2048}{375} \end{aligned}$$

となる。よって(1)の結果より,

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{16}{3} \\ &= \frac{2000}{375} \\ &< T \end{aligned}$$

である。

(答) $T > \frac{S}{2}$

(3)

(2)より, L が D の面積を 2 等分するとき, L は ℓ の上側にある。よってこのとき, L の方程式を

$$y = \frac{4}{5}x + k \quad \dots \textcircled{1}$$

とおき, また L と C の 2 つの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと, α, β は

$$\begin{aligned} 4-x^2 &= \frac{4}{5}x + k \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 4x + 5k - 20 &= 0 \end{aligned}$$

の 2 解であるから, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{4}{5} \\ \alpha\beta = k - 4 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立ち, また L と C で囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ 4-x^2 - \left(\frac{4}{5}x + k \right) \right\} dx &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。これが $\frac{S}{2}$ と等しくなればよく, そのとき(1)より

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 &= \frac{16}{3} \\ \Leftrightarrow \beta-\alpha &= 2^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

である。ここで, ②より,

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{16}{25} - 4k + 16 \\ &= \frac{416}{25} - 4k \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{416}{25} - 4k &= \left(2^{\frac{2}{3}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{104}{25} - 2^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

となる。よって①より, L の方程式は

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{104}{25} - 2^{\frac{4}{3}}$$

である。

(答) $y = \frac{4}{5}x + \frac{104}{25} - 2^{\frac{4}{3}}$